Université de Strasbourg
Faculté de Sciences Economiques
et de Gestion
Année Universitaire 2010/2011

Licence 1ère année Economie Gestion
Mathématiques I

Examen – janvier 2011

Durée : 2 heures
CALCULATRICES INTERDITES - AUCUN DOCUMENT AUTORISE
Le barème est indicatif
Consignes:
soigner la présentation de votre copie,
respecter l'ordre des exercices,
numéroter les feuilles, les exercices,
être concis dans vos explications,
encadrer les résulats finaux
Jusqu'à 2 points de pénalité pourront être soustraits en cas de non respect de ces consignes

Exercice 1 . — (3 points)

(1) Considérons une fonction réelle f à une variable réelle. Que signifie graphiquement le fait d'avoir:

$$\lim_{x \to a} f(x) = l$$

(Répondre par un graphique avec commentaires explicatifs)

(2) Calculer la limite suivante: $\lim_{x \to 1} \sqrt{\dfrac{x^2+2x-3}{x^3-1}}$

Exercice 2 . — (4 points)

On considère la fonction réelle f à une variable réelle définie par :

$$f(x) = x^2 + 2 \cdot \ln(x+2).$$

(1) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.

(2) Etudier la continuité de la fonction f sur son ensemble de définition.

(3) On pose $I = [1;2]$ et on admet que la fonction f est dérivable sur cet intervalle I.

a) Calculer la fonction dérivée $f'(x)$ de la fonction f.
b) Déterminer le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle I.
c) Déterminer $J = f(I)$.
d) Montrer que la fonction f réalise une bijection de l'intervalle I sur l'intervalle J. En déduire que la fonction f définie sur l'intervalle I admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur l'intervalle J.
e) Sans établir la fonction réciproque $f^{-1}(x)$, conclure sur la continuité et le sens de variation de la fonction réciproque f^{-1}sur l'intervalle J.

Exercice 3 . — (3 points)

On sait que tout capital d'un montant K_0 placé durant t années aux taux d'intérêt annuel r avec composition continue

permet d'acquérir un montant de capital K_t tel que:

$$K_t = \lim_{n \to +\infty} K_0 \cdot \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{n\,t}$$

Nous sommes ici face à une limite de forme indéterminée.

√ (1) Quelle est la nature de cette indétermination?

√ (2) Rappeler le Théorème de l'Hospital.

(3) Sachant que $K_0 \cdot \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{n\,t} = K_0 \cdot \left(1 + \frac{1}{\frac{n}{r}}\right)^{\frac{n}{r}\,r\,t}$, utiliser le théorème de l'Hospital

pour montrer que $K_t = K_0 \cdot e^{r\,t}$.

√ (4) Quel est alors le taux de croissance instantané du capital acquis K_t ?

Exercice 4 . — (4 points)

√ (1) Considérons une fonction réelle f à une variable réelle deux fois continuement différentiable sur son ensemble de définition D_f.

√ a) Rappeler la condition nécessaire de premier ordre pour un extrêmum intérieur de cette fonction.

√ b) Rappeler les conditions suffisantes de second ordre pour qu'un point intérieur de D_f satisfaisant la condition nécessaire de premier ordre soit:

√ b1) un maximum local de cette fonction.

√ b2) un minimum local de cette fonction .

√ (2) Considérons une fonction de coût total de production C_T continue et de dérivée continue sur son ensemble de définition $D_{C_T} = \mathbb{R}^+$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ qui à toute quantité d'output Y associe son coût total de production $C_T(Y)$.

Démontrer qu'en la quantité d'output $Y^* \in \mathbb{R}^{+*}$ qui minimise les coûts moyens de production, les coûts moyens de production sont égaux aux coûts marginaux de production.

Exercice 5 . — (6 points)

Soit la fonction g réelle à une variable réelle définie par :

$$g(x) = e^{2x} \cdot (x+3).$$

(1) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction g.

(2) Calculer la fonction dérivée première $g'(x)$ et préciser le domaine de dérivabilité de la fonction g.

(3) A quoi correspond graphiquement le nombre dérivé $a = g'(0)$?

(4) Etablir l'équation de la tangente au graphe de la fonction g au point d'abscisse $x = 0$.

(5) Calculer la fonction dérivée seconde $g''(x)$ et préciser le domaine de dérivabilité de la fonction dérivée première g'.

(6) Trouver le ou les points critiques d'ordre 1 de la fonction g.

(7) Déterminer les intervalles de croissance et de décroissance de la fonction g.

(8) Trouver le ou les points critiques d'ordre 2 de la fonction g.

(9) Déterminer les intervalles de concavité et de convexité de la fonction g.

(10) Quelle est la nature des différents points critiques trouvés: maximum/minimum local/global, point d'inflexion.