Université de Strasbourg
Faculté des Sciences Economiques
Et de Gestion de Strasbourg

Année Universitaire 2010/2011
Licence 1ère année Economie-Gestion

Contrôle Terminal du mardi 7 juin 2011

UE Mathématiques
Semestre 1 de la session 2
Matière : « Mathématiques I »
Sujet de : Mme Godbillon

Durée : 2 heures
CALCULATRICES INTERDITES - AUCUN DOCUMENT AUTORISE
Le barème est indicatif
Consignes:
soigner la présentation de votre copie,
respecter l'ordre des exercices,
numéroter les feuilles, les exercices,
être concis dans vos explications,
encadrer les résulats finaux
Jusqu'à 2 points de pénalité pourront être soustraits en cas de non respect de ces consignes

Exercice 1 . — (5 points)

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_n = \dfrac{4 \cdot u_{n-1} + 3}{u_{n-1} + 2}, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

(1) Calculer u_1, u_2.

(2) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \geq 0$.

(3) Soit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $v_n = \dfrac{u_n - 3}{u_n + 1}$

a) Calculer: v_0, v_1.
b) Exprimer v_n en fonction de v_{n-1}.
c) En déduire la nature de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et donner ses éléments caractéristiques.

(4) Exprimer alors v_n et $S_n = \sum\limits_{i=0}^{n} v_i$ en fonction de n.

Exercice 2 . — (5 points)

On considère la fonction f réelle à une variable réelle définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{2x+1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}.$$

(1) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.

(2) Montrer que la fonction f est continue en $x_0 = 0$.

(3) Calculer pour $x_0 = 0$ les limites suivantes: $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ et $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

(4) La fonction f est-elle dérivable en $x_0 = 0$?

Exercice 3 . — (6 points)

On considère la fonction réelle f à une variable réelle définie par :

$$f(x) = \ln\left(\frac{1 + \sqrt{1 + x^2}}{x}\right).$$

(1) Montrer que l'ensemble de définition de la fonction f est $D_f = \mathbb{R}^{+*}$.

(2) Etudier la continuité de la fonction f sur D_f.

(3) On admet que la fonction f est dérivable sur D_f.

a) Calculer la fonction dérivée $f'(x)$ de la fonction f.
b) Déterminer le sens de variation de la fonction f sur D_f.
c) Montrer que la fonction f réalise une bijection de D_f sur un ensemble J que l'on précisera.
d) Etablir l'expression de la fonction réciproque $f^{-1}(x)$.
e) Sans calculs, conclure sur la continuité et le sens de variation de la fonction réciproque f^{-1} sur l'ensemble J.

Exercice 4 . — (4 points)

Soit un réel $A \in \mathbb{R}^{+*}$ strictement positif et la fonction f réelle à une variable réelle définie par :

$$f(x) = x^3 - 3 \cdot A \cdot x^2$$

(1) Calculer la fonction dérivée première $f'(x)$.

(2) Calculer la fonction dérivée seconde $f''(x)$.

(3) Déterminer les points critiques d'ordre 1 de la fonction f.

(4) Déterminer la nature de ces points critiques : maximum/minimum local, point d'inflexion.

(5) Qu'en est-il de ces points critiques (existence, nature) lorsque le réel A est un réel strictement et qu'on a donc désormais, $A \in \mathbb{R}^{-*}$?