Université de Strasbourg
Faculté des Sciences Economiques
Et de Gestion de Strasbourg

Année Universitaire 2010/2011
Licence 1ère année Economie-Gestion

Contrôle Terminal du mardi 21 juin 2011

<u>UE Mathématiques</u>
<u>Semestre 2 de la session 2</u>
Matière : « Mathématiques II »

Sujet de : Mme Godbillon

Durée : 2 heures
CALCULATRICES INTERDITES - AUCUN DOCUMENT AUTORISE
Le barème est indicatif
Consignes:
soigner la présentation de votre copie,
respecter l'ordre des exercices,
numéroter les feuilles, les exercices,
être concis dans vos explications,
encadrer les résulats finaux
Jusqu'à 2 points de pénalité pourront être soustraits en cas de non respect de ces consignes

Exercice 1 . — (3 points)

Soient deux éléments de $\mathbb{R}^2$: $A = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(1) Calculer la norme des vecteurs A et B.

(2) Montrer que les vecteurs A et B sont orthogonaux.

(3) Soit le vecteur $C = A + B$, déterminer sa norme sans calculer ses coordonnées.

Exercice 2 . — (3 points)

(1) Donner, dans le cas des fonctions réelles à plusieurs variables réelles, la définition d'une fonction homogène de degré k.

(2) Rappeler le théorème d'Euler.

(3) Soient K , le nombre d'unités de capital, L , le nombre d'unités de travail et Y , le nombre d'unités de bien Y. Considérons la fonction de production du bien Y suivante: $Y = Y(K, L) = \beta \cdot K^{\alpha} \cdot L^{1-\alpha}$.

a) Montrer que cette fonction Y de production du bien Y est homogène de degré k à préciser.

b) Qu'implique le Théorème d'Euler du point de vue de la rémunération des facteurs de production pour cette fonction de production Y ? Montrer le par application du Théorème d'Euler à cette fonction de production Y.

Exercice 3 . — (3 points)

Soient la fonction réelle à deux variables réelles $f(x_1, x_2)$ et la fonction réelle g à une variable réelle, fonction implicite de la fonction f, définie par :

$x_2 = g(x_1)$ telle que $f(x_1, g(x_1)) = q$.

Le Théorème des Fonctions Implicites donne l'expression de la dérivée première de la fonction g en fonction des dérivées partielles premières $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial x_2}$ de la fonction f.

(1) Quelle est cette expression?

(2) Par utilisation des règles de dérivation en chaîne, déduire cette expression en partant de la définition de la fonction implicite g.

Exercice 4 . — (7 points)

Soit la fonction réelle f à deux variables réelles définie par: $f(x_1, x_2) = 2\,x_1^4 + x_2^2 - 12\,x_1 x_2$.

(1) Déterminer l'ensemble de définition de cette fonction f.

(2) Donner l'expression générale des courbes de niveau de la fonction f.

(3) Vérifier que la courbe C de niveau $q = 4$ passe par le point $A = (0, 2)$.

(4) Calculer les dérivées partielles premières $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial x_2}$ de la fonction f.

(5) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de niveau C en le point $A = (0, 2)$.

(6) Vérifier que le vecteur gradient de la fonction f en $A = (0, 2)$ est orthogonal à cette tangente.

(7) Rappeler les conditions nécessaires de premier ordre en termes de dérivées pour un extrêmum intérieur d'une fonction réelle à deux variables réelles.

(8) Déterminer les points candidats à être extrema de la fonction f .

(9) Calculer la matrice Hessienne de cette fonction f .

(10) Rappeler les conditions suffisantes en termes de dérivées pour un maximum local et un minimum local intérieurs d'une fonction réelle à deux variables réelles.

(11) Rappeler le critère du point selle dans le cas d'une fonction réelle à deux variables réelles.

(12) Déterminer la nature (maximum, minimum, point selle) des points candidats à être extrema de la fonction f trouvés précédemment à la question (8).

Exercice 5 . — (4 points)

On considère le problème (P) d'optimisation suivant:
optimiser $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 3x_2^2$ sous la contrainte $2x_1 - x_2 = 13$,
à résoudre avec la méthode du Lagrangien.

(1) Donner le Lagrangien associé au problème (P).

(2) Vérifier les conditions de qualification de la contrainte.

(3) Déterminer les points candidats à être une solution du problème (P).

(4) Déterminer la nature (maximum, minimum, ni l'un ni l'autre) des points candidats trouvés.