Algèbre Semestre 2

Durée : 2 heures

Sujet de : M. Gasbarri et M. Wagner

Les téléphones portables, les calculatrices et les documents sont interdits.

Tous les résultats doivent être justifiés.

Barème : Ex. 1 : 7 pts, Ex. 2 : 5 pts, Ex. 3 : 8 pts.

Exercice 1

Soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ donné par :

$$\varphi \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y + z \\ x + y - z \\ -x + y + z \end{pmatrix}$$

1. Donner la matrice de φ par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}^3$
2. Soit U le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ donné par $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} x - y = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}\}$.

Donner une base et la dimension de U .

3. Déterminer la dimension et une base de $\varphi(U)$

4. Soit V le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ donné par $V = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.

Montrer que $\varphi(V) = V$.

5. Montrer que $\mathbb{R}^3 = U \oplus V$.
6. Déterminer le noyau de φ
7. φ est-il un automorphisme?

8. Calculer $\varphi^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Exercice 2

Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^4$ vers $\mathbb{R}^3$ dont la matrice par rapport aux bases canoniques est :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

1. Quel est le rang de f ?

2. Montrer que $\text{Ker}(f) = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

3. Montrer qu'en ajoutant aux deux vecteurs engendrant le noyau de f donnés

ci-dessus les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ on obtient une base de $\mathbb{R}^4$ que l'on

note $\mathcal{B}$.

4. Montrer que la famille $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ forme une base de $\mathbb{R}^3$.

On note $\mathcal{B}'$ cette base.

5. Donner la matrice de f par rapport aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.

Exercice 3

Dans $\mathbb{R}^3$ on considère les sous-espaces vectoriels V et W donnés par :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in V \Leftrightarrow (x = y = z)$$

et

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in W \Leftrightarrow \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. Quelles sont les dimensions respectives de V et W ?
2. Montrer que pour tout élément u de $\mathbb{R}^3$ il existe un unique $v \in V$ et un unique $w \in W$ tels que $u = v + w$.
3. Soit $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Montrer que $\mathcal{B}$ forme une base de $\mathbb{R}^3$.
4. Soit p l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ qui à un élément u de $\mathbb{R}^3$ associe l'élément w déterminé précédemment : $p(u) = w$. Cette application p s'appelle la projection sur W parallèlement à V . Elle vérifie $\text{Ker}(p) = V$ et $\text{Im}(p) = W$. Donner la matrice de p par rapport à la base $\mathcal{B}$.
5. Ecrire la matrice de passage $P_{E_3 \rightarrow \mathcal{B}}$, également notée $A(E_3, \mathcal{B})$ de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ notée E_3 à la base $\mathcal{B}$.
6. Calculer $P_{E_3 \rightarrow \mathcal{B}}^{-1}$.
7. En déduire la matrice $M_{E_3}(p)$, également notée $A_p(E_3)$, de p par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
8. Calculer $M_{E_3}(p)^2$. Que constate-t-on ?