

Examen final
Durée totale : 2 heure

Les calculatrices, téléphones portables et documents sont interdits.

Premier exercice

Calculer un développement limité à l'ordre 4 en 0 de $\frac{\ln(1+x)}{1+x}$

Deuxième exercice

Calculer un développement limité à l'ordre 3 en 0 de $\ln(e+x)$

Troisième exercice

Calculer la limite en $\frac{\pi}{4}$ de

$$\frac{\frac{1}{\cos^2 x} - 2 \tan x}{1 + \cos 4x}$$

Quatrième exercice

Calculer

$$I = \int_1^2 \frac{1}{x^2(x^2 + x + 1)} dx$$

Cinquième exercice

Calculer

$$J = \int_1^2 (\exp x) \left(\frac{1}{x} + \ln x \right) dx$$

Sixième exercice

On note

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\ln(1 + \frac{k}{n})}{n}$$

Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

Septième exercice

Résoudre l'équation différentielle

$$y'' - 6y' + 10y = 0$$

Huitième exercice

L'objectif de cet exercice est de résoudre sur \mathbb{R}^{*+} l'équation différentielle

$$(\mathcal{E}) \quad y' + \frac{1}{x}y = \frac{1}{x(1+x^2)}$$

1. Donner une primitive de $\frac{1}{(1+x^2)}$
2. Résoudre l'équation (E) : $y' + \frac{1}{x}y = 0$
3. Résoudre \mathcal{E}