L2 M.E

Université de Strasbourg
Probabilités-Statistique

Département de mathématique
L2 S3 année 2010-2011

Contrôle Continu : UE Probabilités et Statistique

Durée 1H30

****

Tous les documents sont interdits. La calculatrice et le téléphone portable sont également interdits.

Chaque réponse devra être clairement justifiée pour être validée.

Note : une question bonus est par définition une question qui ne peut que rapporter des points.

****

Exercice 1 :

Le gérant d'un magasin d'informatique a reçu un lot de boîtes de CD-ROM. 5% des boîtes sont abîmées. Le gérant estime que :
- 60% des boîtes abîmées contiennent au moins un CD-ROM défectueux.
- 98% des boîtes non abîmées ne contiennent aucun CD-ROM défectueux.

Un client achète une boîte du lot. On désigne par A l'événement : "la boîte est abîmée" et par B l'événement "la boîte achetée contient au moins un CD-ROM défectueux".

1. Donner les probabilités de $\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(A^c)$, $\mathbb{P}(B|A)$, $\mathbb{P}(B|A^c)$, $\mathbb{P}(B^c|A)$, $\mathbb{P}(B^c|A^c)$ et $\mathbb{P}(B)$.
2. Le client constate qu'un des CD-ROM acheté est défectueux. Quelle est la probabilité pour qu'il ait acheté une boîte abîmée.

Exercice 2 :

On considère un dé cubique truqué, de telle sorte que la probabilité d'obtenir la face numérotée k est proportionnelle à k (on suppose que les faces sont numérotées de 1 à 6). Soit X la variable aléatoire associée au lancer de ce dé.

1. Déterminer la loi de X, calculer son espérance.
2. **Question bonus :** A et B jouent avec le dé au jeu suivant : ils lancent n fois le dé, et à chaque lancer, A prend 1 euro à B si le résultat est inférieur ou égal à 4, et il donne 1 euro à B sinon. On note G_n le gain de A après le nème jet. Calculer l'espérance de G_n. Le jeu est il équitable? Sinon, à qui est-il profitable?
3. On pose $Y = 1/X$. Déterminer la loi de Y ainsi que son espérance.

Exercice 3 :

1. Déterminer par deux méthodes l'espérance et la variance d'une variable aléatoire X de loi géométrique de paramètre p.
2. Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$. Déterminer la loi de la variable aléatoire $X = -\ln U$ ainsi que sa densité, son espérance et sa variance.
3. Si nous disposons à présent de n variables aléatoires indépendantes $X_1, ..., X_n$ de même loi que X de la question précédente, vers quoi converge $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ et comment s'appelle cette convergence.
4. **Question bonus :** Étudier la convergence de la suite $(U_1 \times ... \times U_n)^{1/n}$ où les U_k sont indépendantes, de loi uniforme sur $[0,1]$.
5. Soit X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[a,b]$, avec $0 < a < b$. Donner la fonction de répartition, la densité, l'espérance et la variance de $Y = X^2$.