Université de Strasbourg
Faculté des Sciences Economiques
Et de Gestion

Année Universitaire 2010/2011
Licence 2$^{\text{ème}}$ année Economie-Gestion

SESSION 1 SEMESTRE 3

MATHEMATIQUES 3
(M. Matmour)

Durée : 2 heures
Aucun document autorisé
Calculatrice non programmable autorisée

SUJET

Exercice 1: (3 pts)
Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{xe^{x}}{(x+1)^n}$.
1. Montrer que $\forall n \geq 2$, pour tout nombre réel $x \in [0;1]$ on a :
$0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{e}{(1+x)^n}$.
2. En déduire que $\forall n \geq 2$, $0 \leqslant \int_0^1 f(x) \leqslant \frac{e}{n-1}$
3. Déterminer la limite de l'intégrale lorsque n tend vers l'infini .

Exercice 2 : (4 pts)
On pose $I = \int_0^2 \frac{12x^2-31x-96}{(x^3-3x^2-10x+24)}dx$ pour tout x appartenant à D.
1. Déterminer l'ensemble de définition de D et justifier l'existence de I.
2. Déterminer 3 nombres réels a, b et c tels que l'on ait :
$\frac{12x^2-31x-96}{(x^3-3x^2-10x+24)} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+3} + \frac{c}{x-4}$ pour tout x appartenant à D.
3. En déduire la valeur de I.

Exercice 3 : (4pts)
1. Soit $I = \int_0^1 \frac{lnx}{(1+x^2)}dx$.
a) Montrer que I converge.
b) A l'aide du changement de variable $u = \frac{1}{x}$, calculer la valeur de I.
2. Soit a > 0, calculer l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{lnx}{(a+x^2)}dx$

Exercice 4 : (4pts)
On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et

$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$,
1. Calculer AB, AC. Que constate-t-on ?
2. La matrice A est-elle inversible ?

3. Trouver toutes les matrices carrées F de taille 3 telles que $AF = 0$ (ou 0 désigne la matrice nulle).

Exercice 5 : (5pts)

On considère la matrices : $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

I_3 désigne la matrice carrée identité d'ordre 3.

1. Montrer que $A^2 = 2I - A$, en déduireque A est inversible puis déterminer A^{-1}.

2. A l'aide de la méthode Gauss-Jordan recalculer A^{-1}.