FSEG
STRASBOURG
Faculté des sciences économiques et de gestion

UNIVERSITÉ DE STRASBOURG

Année Universitaire 2010/2011
Licence Economie – Gestion, L2-S3

UE Probabilités et Statistique

Examen : Probabilités et Statistique II – Session 1 - Janvier 2011

Durée de l'épreuve : 2h00. Enseignant : M. EL OUARDIGHI

Documents autorisés : le formulaire de probabilités et tables statistiques (7 pages).
Les calculatrices autorisées sont celles retenues par le conseil de la Faculté.
Barème indicatif : I. 2+2+2=6 points. II. 1+1+1+1= 4 points. III. 2+2+2+2+2=10 points.
Temps moyen indicatif : I. 40mn. II. 20mn. I. 50mn.

Sujet

I. Soient X et Y deux V.A. (variables aléatoires), et soient deux constantes a et b.

I.1. Supposons que $Y = aX + b$. Calculer l'espérance $E(Y)$ et la variance $V(Y)$.

I.2. Soient $E(X) = 10$ et $V(X) = 4$. Déterminer les valeurs des constantes a et b pour que la V.A. Y (où $Y = aX + b$) soit centrée et réduite.

I.3. (*i*) Soit la variable aléatoire $Z = X + Y$. Donner l'expression de la variance $V(Z)$.

(*ii*) Montrer que dans le cas où $Y = aX + b$, la variance $V(Z) = cV(X)$ où c est une constante positive à expliciter.

(*iii*) Application : avec les données de la question I.2., calculer la valeur de $V(Z)$.

II. On dispose de 200 jetons qu'on répartie au hasard dans 10 boites numérotées de 1 à 10. On cherche la probabilité que la boite n°5 contienne 20 jetons. Soit la V.A. Y 'nombre de jetons placés dans la boite n°5'.

II.1. Quelle est la loi de Y ?

II.2. Par quelle loi peut-on approximer la V.A. Y ?

II.3. Soit la V.A. Y_1 l'approximation de la loi de Y. Par quelle nouvelle loi peut-on approximer Y_1 ?

II.4. Soit la V.A. Y_2 l'approximation de la loi de Y_1. Calculer la probabilité $P[Y_2 = 20]$.

III. Un département Marketing d'une grande entreprise souhaite étudier les préférences des consommateurs envers une boisson non gazeuse. Le département prélève dans une population de moyenne μ inconnue et d'écart-type $\sigma = 4$, un EAS (échantillon aléatoire simple) d'effectif $n = 64$ consommateurs. La consommation moyenne annuelle observée est de l'ordre de 48 litres. Nous supposons que la consommation annuelle de la boisson gazeuse, notée X, est distribuée suivant une loi normale.

III.1. Quel est l'estimateur par la méthode des moments de μ, noté $\hat{\mu}_{MM}$? Montrer que $\hat{\mu}_{MM}$ est sans biais et convergent.

III.2. (*i*) Donner les expressions des fonctions vraisemblance (i.e., $L(x_1,\ldots,x_n;\mu)$) et log-vraisemblance (i.e., $\ln L(x_1,\ldots,x_n;\mu)$) de l'échantillon. (*ii*) Calculer ensuite l'estimateur du maximum de vraisemblance de μ, noté $\hat{\mu}_{MV}$.

III.3. Peut-on conclure que $\hat{\mu}_{MV}$ est efficace ? Justifier votre réponse.

III.4. Pour un niveau de confiance de 95%, déterminer un intervalle de confiance pour μ.

III.5. Déterminer la taille de l'échantillon pour que l'erreur maximale, au niveau de confiance de 95%, soit inférieure ou égale à 0.5.
