Université de Strasbourg
Faculté des Sciences Economiques
et de Gestion

Année Universitaire 2010/2011
Licence 2ème année Economie Gestion

SESSION 2 SEMESTRE 3

CT MATHEMATIQUES
(M. Matmour)

Durée : 2 heures
Documents autorisés : néant
Calculatrice non programmable autorisée

Exercice 1: (6 pts)

1. On pose $J = \int_0^{+\infty} (2x+1)e^{-x}dx$.
Etudier la convergence de l'intégrale J.
2. On pose : $f(x) = \frac{1}{x ln(x)}$ et $I = \int_e^{e^2} f(x)dx$.
a) déterminer l'ensemble de définition D de la fonction f.
b) Justifier l'existence de l'intégrale I.
c) A l'aide d'un changement de variable :$u = ln(x)$, calculer I.
d) Peut-on calculer I sans changement de variable ? Dans l'affirmative, effectuer ce calcul.

Exercice 2 : (4 pts)

On pose I $= \int_0^1 \frac{4-2x^2+1}{2x^3-9x^2-2x+24}dx$ pour tout x appartenant à D.
1. Déterminer l'ensemble de définition de D et justifier l'existence de I.
2. Déterminer 3 nombres réels a, b et c tels que l'on ait :
$\frac{4-2x^2+1}{2x^3-9x^2-2x+24} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{2x+3} + \frac{c}{x-4}$ pour tout x appartenant à D.
3. En déduire la valeur de I.

Exercice 3 : (4 pts)

On considère la matrice A= $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1. Calculer l'inverse de A par la méthode de votre choix (Gauss-jordan, ...).
2. Calculer A^2 et A^3 puis trouver les réels a, b, c tels que :
$A^3 + aA^2 + bA + cI_3 = O_3$ avec I_3 désignant la matrice carrée unité d'ordre 3.
3. En déduire que la matrice A est inversible et exprimer sa matrice inverse A^{-1}en fonction des matrices A^2, A et I_3 puis calculer A^{-1}.

Exercice 4 : (6 pts)

On considère les matrices : $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. I_3 désigne la matrice carrée d'ordre 3.
1. Calculer : A^2puis A^3.
2. En utilisant un raisonnement par récurrence, démontrer que $\forall p \geqslant 3$, on a : $A^p = O_3$ où O_3 désigne la matrice carrée nulle d'ordre 3.
3. En remarquant que $M = I_3 + A$ et en utilisant la formule du binôme de Newton, déterminer M^n pour tout entier naturel $n \geqslant 2$.
4. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, démontrer que la relation trouvée pour M^n est vrai à partir d'un certain n réel.