UNIVERSITÉ DE STRASBOURG
PROBABILITÉS-STATISTIQUE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUE
L2 S3 ANNÉE 2010-2011

CONTRÔLE TERMINAL : UE PROBABILITÉS ET STATISTIQUE

DURÉE 2H

****

Tous les documents sont interdits. La calculatrice et le téléphone portable sont également interdits.

Chaque réponse devra être clairement justifiée pour être validée.

Le barême est uniquement donné à titre indicatif.

****

Question de cours (2 points) :

Donner l'inégalité de Tchébychev.

Exercice 1 (3 points) :

1. Une usine d'ampoules dispose de 3 machines A, B et C qui fabriquent respectivement 20, 30 et 50% de la production. Notons D l'événement "l'ampoule est défectueuse". Sachant que la probabilité qu'une ampoule défectueuse ait été fabriquée par A, B, C est : $\mathbb{P}(D|A) = 0.05, \mathbb{P}(D|B) = 0.04, \mathbb{P}(D|C) = 0.01$, calculer la probabilité :
a. qu'une ampoule soit défectueuse ;
b. qu'une ampoule défectueuse provienne de A ;
c. qu'une ampoule non défectueuse provienne de C.

Exercice 2 (7 points) :

Soit X une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre $\theta > 0$.
1. Donner l'ensemble des valeurs possibles prises par X et les probabilités associées.
2. Donner la définition de la fonction génératrice des moments et calculer la dans le cas de la Poisson(θ).
3. Si X_1 est de loi Poisson(θ_1) et X_2, indépendante de X_1, de loi Poisson(θ_2), quelle est la loi de $X_1 + X_2$. Justifier.
4. Sous les hypothèses de la question 3., calculer la loi de $X_1 | X_1 + X_2$.

Exercice 3 (4 points) :

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi respective $\Gamma(a, \lambda)$ et $\Gamma(b, \lambda)$ avec $a, b, \lambda \in]0, \infty[$. On rappelle que la densité d'une variable aléatoire de loi $\Gamma(\alpha, \lambda)$ est

$$f(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}, x > 0.$$

1. Calculer $\mathbb{E}X^{2-a}$.
2. Calculer la loi du couple $\left(X + Y, \frac{X}{X+Y}\right)$.
3. Montrer que $X + Y$ et $\frac{X}{X+Y}$ sont indépendantes.

Exercice 4 (4 points) :

Un sac contient 100 billes, 50 sont rouges, les autres sont bleues. On admet que la probabilité d'obtenir une bille rouge en un tirage est 0.50.

1. Une épreuve consiste à tirer 100 fois de suite une bille, en remettant à chaque fois la bille tirée dans le sac après avoir noté sa couleur. Le nombre de fois où l'on tire une bille rouge est une variable aléatoire X. Déterminer l'espérance m de X, sa variance et son écart-type σ.

2. À l'aide de l'inégalité de Tchébychev, donner un majorant à la probabilité pour que $|X - m| \geq 2\sigma$. À quelles valeurs de X cela correspond-il ?

3. Soit X_i=1 si la ième bille tirée est rouge, 0 sinon. Posons $S = X_1 + ... + X_{100}$. À l'aide du théorème central limite, trouver t tel que $\mathbb{P}(|S - 50| > t) \simeq 0.1$. On rappelle que le réel u_α tel que $\mathbb{P}(|X| \leq u_\alpha) = 0.9$ où X est de loi normale, centrée et de variance 1 est 1.645.