FSEG de Strasbourg
L2

Mathématiques4
2010/2011

SUJET

SESSION DE MAI

Durée : 2 heures
Documents autorisés : néant
Calculatrice non programmable autorisée

Exercice 1: (4 pts)

Soit $a \in \mathbb{R}$ et la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$.

1. Calculer le déterminant de A. Pour quelle(s) valeur(s) de a la matrice A est-elle inversible ?
2. Dans le cas ou A est inversible, déterminer A^{-1} par la méthode de la comatrice.

Exercice 2 : (6 pts)

On note $B = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par $\forall \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$:

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha+1 & -\alpha & \alpha+1 \\ \alpha-2 & \alpha-1 & \alpha-2 \\ 2\alpha-1 & \alpha-1 & 2\alpha-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \text{et } M = \begin{pmatrix} 2\alpha+1 & -\alpha & \alpha+1 \\ \alpha-2 & \alpha-1 & \alpha-2 \\ 2\alpha-1 & \alpha-1 & 2\alpha-1 \end{pmatrix}.$$

On suppose que $\alpha = -1$.

1. Préciser la matrice M ainsi que son rang.
2. Montrer que le vecteur $u_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} \in \text{Ker } (f)$. En déduire une base de Ker (f).
3. Chercher les vecteurs u solutions éventuelles de l'équation $f(u) = u_1$. A-t-on $\mathbb{R}^3 = \text{Ker } (f) \oplus \text{Im } (f)$?
4. On pose $u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$, montrer que $B' = (u_1, u_2, u_3)$

est une base de $\mathbb{R}^3$ et donner la matrice D de l'endomorphisme f dans cette nouvelle base B'.
5. Donner P la matrice de passage de la base B à la base B'. Calculer P^{-1} , préciser la relation entre M, D, P et P^{-1}.
6. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ préciser D^n. Donner le lien entre M^n et D^n.
7. En déduire M^{2009}.

Exercice 3 : (6 pts)

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1. Calculer le polynôme caractéristique de A.
2. En déduire les valeurs propres de la matrice A.
3. Montrer que A est diagonalisable.
4. Donner la matrice diagonale D associée à A.
5. Déterminer la matrice de passage P et calculer son inverse P^{-1}.
6. En déduire l'expression de A^n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 4 : (4 pts)

On considère l'équation différentielle Résoudre l'équation suivante :
(E) $\qquad ay'' + by' + cy = f(x)$
1. Lorsque $a = 0, b = 4, c = 2, f(x) = 0$.
2. Lorsque $a = 0, b = 2, c = 1, f(x) = 2x + 4$.
3. Lorsque $a = 8, b = 8, c = 2, f(x) = 2x + 4$.
4. Lorsque $a = 3, b = 8, c = 4, f(x) = 4x + 2$, $y'(0) = 0$ et $y(0) = 0$.