CT MATHEMATIQUES
(M. Matmour)

Durée : 2 heures
Documents autorisés : néant
Calculatrice non programmable autorisée

Exercice 1: (3 pts)

Soit $n \in \mathbb{N}$ et étant impair. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = A - I_n$.
1. Montrer que $\det(A) = -1$.

Exercice 2 : (6 pts)

On note $B = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par $\forall \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$:

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \text{ et } M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. la matrice M est-elle inversible ?
2. Déterminer une base de Ker et une base de Im (f).
3. A-t-on $\mathbb{R}^3 = \text{Ker }(f) \oplus \text{Im }(f)$?
4. Montrer que $M^2(M + I_3) = 2M$. En déduire que $M + I_3$est une matrice inversible et donner son inverse. (Indication $M = (M + I_3) - I_3$.
5. Montrer qu'il existe deux suites de nombres réels (u_n)et (v_n) telles que pour tout nombre entier $n > 2$, $M^n = u_nM^2 + v_nM$. L'expression des suites n'est pas demandée, seule leur existence est à prouver.

Exercice 3 : (7 pts)

On considère le système suivant ou m est un paramètre réel,

x, y et z des inconnues réelles :

$$(S) : \begin{cases} (1+m)x + y + z &= 0 \\ x + (1+m)y + z &= 0 \\ x + y + (1+m)z &= m \end{cases}$$

1. Peut-on dire sans calcul si ce système est de Cramer ?
2. On associe à (S) l'écritur matricielle $AX = B$.
Qui sont A, X, B ?.
3. Déterminer le déterminant de A en fonction de m.
4. Pour quelle(s) valeur(s) de m (S) est-il de Cramer ?
En déduire la solution de (S) .
5. Déterminer la matrice de passage P et calculer son inverse P^{-1}.
6. Déterminer les solutions de (S) quand le système est dégénéré.

Exercice 4 : (4 pts)

On considère l'équation différentielle Résoudre l'équation suivante :
(E) $\quad ay'' + by' + cy = f(x)$
1. Lorsque $a = 0, b = 8, c = 5, f(x) = 0$.
2. Lorsque $a = 0, b = 4, c = 6, f(x) = 4x + 6$.
3. Lorsque $a = 3, b = 6, c = 3, f(x) = 2x + 8$.
4. Lorsque $a = 21, b = 12, c = \frac{3}{4}, f(x) = 4x^2 + 2$, $y'(0) = 0$ et $y(0) = 0$.