Université de Strasbourg
Faculté de Sciences Economiques
et de Gestion
Année Universitaire 2011/2012

Licence 1ère année Economie Gestion
Mathématiques I

Examen – janvier 2012

Durée : 2 heures
CALCULATRICES INTERDITES - AUCUN DOCUMENT AUTORISE
Le barème est indicatif
Consignes:
soigner la présentation de votre copie,
respecter l'ordre des exercices,
numéroter les feuilles, les exercices,
être concis dans vos explications,
encadrer les résulats finaux
Jusqu'à 2 points de pénalité pourront être soustraits en cas de non respect de ces consignes

Exercice 1 . — (2 points)

Démontrer que la composée de deux fonctions réelles à une variable réelle ayant un sens de variation différent est une fonction décroissante.

Exercice 2 . — (5 points)

Soit la fonction g réelle à une variable réelle définie par :
$g(x) = \ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$.

(1) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction g.

(2) Etudier la continuité de la fonction g sur son ensemble de définition.

(3) On pose $I =]-1;1[$ et on admet que la fonction g est dérivable sur cet intervalle I.

a) Calculer la fonction dérivée $g'(x)$ de la fonction g
b) Utiliser la différentielle pour calculer une valeur approchée de $g(0,02)$.
c) Déterminer le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle I.
d) Déterminer $J = g(I)$.
e) Montrer que la fonction g réalise une bijection de l'intervalle I sur l'intervalle J.
f) Déterminer alors la fonction réciproque g^{-1} de la fonction g .

Exercice 3 . — (3 points)

(1) Rappeler le Théorème de l'Hospital.

(2) Utiliser ce théorème pour calculer les limites suivantes

a) $\lim\limits_{x \to b} \frac{x^3 - b^3}{x - b}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$

Exercice 4 . — (3 points)

Une entreprise produit un bien à partir de trois matières premières A , B et C; les coûts en les trois matières premières sont actuellement: $C_A = 60$, $C_B = 30$ et $C_C = 10$.

Cette entreprise enregistre une augmentation de 10% dans sa consommation Q_A de la matière première A dont le prix unitaire P_A diminue de 1%, une diminution de 7% dans sa consommation Q_B de la matière première B dont le prix unitaire P_B s'accroit de 2% et une augmentation de 2% dans sa consommation Q_C de la matière première C dont le prix unitaire P_C reste stable.

(1) Quel est le taux de croissance du coût de la matière première A ?

(2) Quel est le taux de croissance du coût de la matière première B ?

(3) Quel est le taux de croissance du coût de la matière première C ?

(4) Quel est le taux de croissance du coût total des matières premières ?

Tous les taux de croissance donnés et demandés sont supposés être des taux de croissance instantanés.

Exercice 5 . — (3 points)

(1) Considérons une fonction réelle f à une variable réelle deux fois continuement différentiable

sur son ensemble de définition D_f.

a) Rappeler la condition nécessaire de premier ordre pour un extrêmum intérieur de cette fonction.

b) Rappeler les conditions suffisantes de second ordre pour qu'un point intérieur de D_f satisfaisant la condition nécessaire de premier ordre soit:

b1) un maximum local de cette fonction.

b2) un minimum local de cette fonction .

(2) Une entreprise produit un bien avec un coût total de production $C_T(Q)$ où Q est la quantité de bien produite. Supposons que C_T est deux fois continuement différentiable sur son ensemble de définition $D_{C_T} = \mathbb{R}^+$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$. Le prix de vente p du bien produit est fixé, $p = p^*$.

a) Démontrer qu'en toute quantité de bien produit $Q^* \in \mathbb{R}^{+*}$ permettant à l'entreprise d'être en un extremum (maximum ou minimum) de son profit, le coût marginal de production est égal au prix $p = p^*$.

b) Démontrer également qu'on est assuré que l'entreprise maximise son profit en Q^* dès lors que ce coût marginal de production est strictement croissant en Q^*.

Exercice 6 . — (4 points)

(1) Rappeler le Théorème de Weierstrass-Valeurs extrêmes (cas des fonctions à une variable).

(2) Soit la fonction f réelle à une variable réelle définie par:

$$f(x) = 9x^5 - 10x^3 - 15x + 3$$

Utiliser le Théorème de Weierstrass-Valeurs extrêmes pour déterminer les minima et maxima globaux de cette fonction sur l'intervalle $I = [0; 2]$.