Université de Strasbourg
Faculté de Sciences Economiques et de Gestion
Année Universitaire 2011/2012

Licence 1ère année Economie Gestion
MATHEMATIQUES I

Examen – juin 2012
Semestre 1, Session2

Durée : 2 heures
CALCULATRICES INTERDITES - AUCUN DOCUMENT AUTORISE
Le barème est indicatif
Consignes: soigner la présentation de votre copie, respecter l'ordre des exercices, numéroter les feuilles, les exercices, être concis dans vos explications, encadrer les résulats finaux
Jusqu'à 2 points de pénalité pourront être soustraits en cas de non respect de ces consignes

Exercice 1 . — (4 points)

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_n = \dfrac{u_{n-1}+4}{3}, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

(1) Calculer u_1, u_2, u_3.

(2) Soit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $v_n = u_n - 2$

a) Calculer: v_0, v_1, v_2, v_3.
b) Exprimer v_n en fonction de v_{n-1}.
c) En déduire la nature de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et donner ses éléments caractéristiques.

(3) Exprimer alors v_n et $S_n = \sum_{i=0}^{n} v_i$ en fonction de n.

Exercice 2 . — (3 points)

Calculer la valeur actuelle (c'est à dire en début de première période) au taux composé annuellement de 4% par an, de l'annuité ordinaire (de fin de période) suivante: 1000 euros par an durant 3 ans.

(On a $\left(\frac{1}{1,04}\right)^3 \simeq 0,89$)

Exercice 3 . — (4 points)

On considère la fonction f réelle à une variable réelle définie par :

$$f(x) = -x + 2 - \frac{3}{x+2}$$

(1) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.

(2) On pose $I = [-1; 1]$.

a) Etudier la continuité de la fonction f sur l'intervalle I.
b) Calculer la fonction dérivée première $f'(x)$ de la fonction f.
c) Déterminer les variations de la fonction f sur l'intervalle I.
d) Déterminer $J = f(I)$.
e) La fonction f réalise-t-elle une bijection de l'intervalle I sur l'intervalle J.
f) Déterminer les coordonnées du point $B = (x, y)$ avec $x \in I$, point de la courbe C représentant la fonction f sur l'intervalle I, tel que la tangente à cette courbe C en B soit de pente égale à $\frac{1}{3}$.
(On a $\sqrt{3} \simeq 1,732$)

Exercice 4 . — (4 points)

(1) Considérons une fonction réelle f à une variable réelle deux fois continuement différentiable sur son ensemble de définition D_f.

a) Rappeler la condition nécessaire de premier ordre pour un extrêmum intérieur de cette fonction.

b) Rappeler les conditions suffisantes de second ordre pour qu'un point intérieur de D_f satisfaisant la condition nécessaire de premier ordre soit:
b1) un maximum local de cette fonction.
b2) un minimum local de cette fonction .

(2) Considérons une fonction de coût total de production C_T continue et de dérivée continue sur son ensemble de définition $D_{C_T} = \mathbb{R}^+$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ qui à toute quantité d'output Y associe son coût total de production $C_T(Y)$.

Démontrer qu'en la quantité d'output $Y^* \in \mathbb{R}^{+*}$ qui minimise les coûts moyens de production, les coûts moyens de production sont égaux aux coûts marginaux de production.

Exercice 5 . — (5 points)

On considère la fonction f réelle à une variable réelle définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = (x+1) \cdot e^{-x}$

(1) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$, puis en $-\infty$.

(2) Calculer la fonction dérivée première $f'(x)$.

(3) Etablir l'équation de la tangente au graphe de la fonction f au point d'abscisse $x = 1$.

(4) Calculer la fonction dérivée seconde $f''(x)$.

(5) Trouver les points critiques d'ordre 1 et d'ordre 2 de la fonction f.

(6) Déterminer les intervalles de croissance et de décroissance de la fonction f.

(7) Déterminer les intervalles de concavité et de convexité de la fonction f.

(8) Quelle est la nature des différents points critiques trouvés: maximum/minimum local/global, point d'inflexion.