

Session 2

Durée totale : 2 heures

Les calculatrices, téléphones portables, baladeurs et documents sont interdits.

Exercice 1. Soit m un paramètre réel. On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & m & 1 \\ 3 & 1 & -m \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que le déterminant de A est nul si et seulement si $m = 0$ ou $m = 2$.
2. On suppose dans cette question uniquement que $m = 1$. Justifier que la matrice A est inversible et calculer son inverse.
3. On considère le système suivant :

$$\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x + my + z = 0 \\ 3x + y - mz = 1 \end{cases}$$

- (a) Écrire le système sous forme matricielle.
- (b) Résoudre le système en fonction de la valeur de m .

Exercice 2. 1. (a) Calculer le pgcd de 17 et 11.

- (b) Justifier l'existence de deux entiers relatifs u et v tels que

$$11u + 17v = 1.$$

Donner un exemple de couple (u, v) qui convient.

- (c) Résoudre l'équation diophantienne $11x + 17y = 1$.

2. Résoudre les systèmes diophantiens suivants :

$$\begin{cases} x = 3 \pmod{17} \\ x = 4 \pmod{11} \end{cases}, \quad \begin{cases} x = 3 \pmod{17} \\ x = 0 \pmod{11} \end{cases}$$

3. (a) Résoudre l'équation $x^2 + 7x = 0 \pmod{11}$.

- (b) Dédurre des questions précédentes les solutions du système

$$\begin{cases} x = 3 \pmod{17} \\ x^2 + 7x = 0 \pmod{11} \end{cases}$$

Exercice 3. On considère le polynôme $P = 4X^4 - 8X^3 + 9X^2 - 5X + 1$.

1. Combien P a-t-il de racines (comptées avec multiplicité) dans \mathbb{C} ?
2. Calculer le polynôme dérivé P' de P .
3. Montrer que $\text{pgcd}(P, P') = X - \frac{1}{2}$. Que peut-on en déduire ?
4. Factoriser P dans \mathbb{R} et dans \mathbb{C} .