Math-Eco
Analyse S1

12 juin 2012

Examen de rattrapage - Analyse S1
Durée totale : 2 heures

Les calculatrices, téléphones portables, baladeurs et documents sont interdits.
Le sujet comporte 5 exercices. Le candidat prendra soin de bien justifier ses réponses.

Premier exercice

1) a) Calculer les racines carrées complexes de

$$2i.$$

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^2 - (5+i)z + (6+2i) = 0.$$

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^6 = 1.$$

Deuxième exercice

On définit la suite $(u_n)_n$ par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + \dfrac{(-1)^n}{n+1}$.
1) On définit les suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ par : $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = u_{2n}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, b_n = u_{2n+1}$.
Calculer :
i) $a_{n+1} - a_n$,
ii) $b_{n+1} - b_n$,
iii) $b_n - a_n$.
2) Montrer que $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ convergent vers la même limite.

Troisième exercice

Soit

$$f : x \longmapsto x\sin(\frac{1}{x})$$

1) a) Sur quel ensemble f est-elle continue ? dérivable ?
b) Étudier la parité de f.
2) Calculer la dérivée de f.
3) a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.
b) Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.
4) a) Calculer $\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{\sin(y)}{y}$.
b) En déduire $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.

Quatrième exercice

Soit

$$\begin{array}{rcl} f: \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 4x + x^2 + x^4. \end{array}$$

1) Calculer $f(0)$ et $f'(0)$. Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2)a) Montrer que f est bijective de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$. On notera $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ sa bijection réciproque.
b) Montrer que g est dérivable.
c) Calculer $g'(0)$.
3) Montrer que f est convexe sur $\mathbb{R}$.
4) a) Calculer $f(-2)$ et $f(-1)$.
b) Montrer que f admet un zéro dans $[-2; -1]$.

Cinquième exercice

Soit

$$\begin{array}{rcl} f: [0;1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}x^2. \end{array}$$

1) Calculer $f(0)$.
2) Montrer que

$$\forall x \in [0;1],\ |f'(x)| \leq \frac{3}{4}.$$

3) Énoncer l'inégalité des accroissements finis en rappelant les hypothèses.
4) On considère la suite définie par $u_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n).$$

a) Déduire de 1), 2) et 3) que

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1}| \leq \frac{3}{4}|u_n|.$$

b) Montrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1}| \leq (\frac{3}{4})^n.$$

c) En déduire la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.