Université de Strasbourg
Faculté de Sciences Economiques
et de Gestion
Année Universitaire 2011/2012

Licence 1ère année Economie Gestion
Mathématiques II

Examen – Mai 2012

Durée : 2 heures
CALCULATRICES INTERDITES - AUCUN DOCUMENT AUTORISE.
Le barème est indicatif.
Consignes: soigner la présentation de votre copie, respecter l'ordre des exercices, numéroter les feuilles et les exercices, être concis dans vos explications, encadrer les résulats finaux.
Jusqu'à 2 points de pénalité pourront être soustraits en cas de non respect de ces consignes.

Exercice 1 . — (3 points)

Soient deux éléments de $\mathbb{R}^3$: $M = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(1) Calculer $2M \cdot (M - N)$.

(2) Quelle est la nature de l'angle formé par les vecteurs M et N ?

(3) Soit le point $Q = (x, 0, y)$, trouver x et y de sorte que ce point Q appartienne au segment de droite d'extrémités les points M et N.

(4) Calculer la distance euclidienne entre les points M et N.

(5) Donner les coordonnées d'un vecteur orthogonal à M.

(6) Trouver l'équation du plan P passant par le point $A = (1, 1, 1)$ et de vecteur normal N.

Exercice 2 . — (4 points)

Soit une fonction g homogène de degré r sur $\mathbb{R}^2$ et une fonction f définie par:
$f(u, v) = g(x_1, x_2)$ avec $x_1 = \sqrt{u^{\frac{1}{3}} \cdot v^{\frac{2}{3}}}$ et $x_2 = \sqrt{2u + v}$.

(1) Donner la définition d'une fonction homogène de degré k.

(2) Montrer que la fonction f est homogène de degré k à préciser.

(3) Rappeler le théorème d'Euler.

(4) Calculer les dérivées partielles premières $\dfrac{\partial f}{\partial u}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial v}$ de la fonction f.

(5) Soit $g(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ homogène de degré $r = 1$, vérifier que la fonction f satisfait la formule d'Euler.

Exercice 3 . — (5 points)

Considérons une fonction réelle f à deux variables réelles définie sur $\mathbb{R}^2$ par :
$f(X) = f(x_1, x_2) = 2x_1^4 + x_2^2 - 12x_1x_2$

(1) Donner l'expression générale des courbes de niveau de la fonction f.

(2) De quel niveau q est la courbe de niveau qui passe par le point $C = (1, 0)$.

(3) Calculer le Gradient et la matrice Hessienne de cette fonction f.

(4) Déterminer l'équation de la droite tangente à la courbe de niveau passant par le point $B = (1, 1)$ qui serait tangente à cette courbe en ce même point $B = (1, 1)$.

(5) Vérifier que le vecteur gradient de la fonction f en $B = (1, 1)$ est orthogonal à cette droite tangente.

(6) En $B = (1, 1)$, dans quelle proportion doit-on augmenter les valeurs des variables x_1 et x_2 pour obtenir un accroissement maximal de la fonction f ?

(7) Déterminer les exrema libres de cette fonction f.

Exercice 4 . — (4 points)

(1) Rappeler le théorème de Weierstrass-Valeurs Extrêmes dans le cas des fonctions à plusieurs variables.

(2) Utiliser ce théorème pour déterminer les extrema globaux de la fonction
$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + x_1$ sous la contrainte $x_1^2 + x_2^2 \leqslant 4$.

Exercice 5 . — (4 points)

Trouver les extrema locaux de la fonction $f(x_1, x_2) = x_1x_2 + 3$ sous la contrainte $x_1^2 + x_2^2 = 8$.
A résoudre avec la méthode du Lagrangien pour trouver les candidats à être extrema et l'utilisation du Hessien Bordé pour la détermination de la nature des candidats.