Université de Strasbourg
Faculté des Sciences Economiques
et de Gestion de Strasbourg

Année Universitaire 2011/2012

Licence 1ère année Economie-Gestion
Licence 1ère année Mathématiques-Economie

UE ECONOMIE
Session de mai **CORRECTION**

Matière : Microéconomie II: comportements individuels
Sujet de : Mme Spaeter et Mme Umbhauer

Durée : 2 heures

Documents autorisés : aucun.
Seules les calculatrices agréées par la faculté sont autorisées.

Barème: ***le barème n'est qu'indicatif***.

IDENTIFICATION DE L'ETUDIANT

AMPHI_____ Place______

NUMERO ANONYMAT___________ NUMERO ETUDIANT____________

NOTA BENE

- ***Il vous est demandé de répondre aux questions des exercices suivants dans les emplacements prévus sur ce document. Vous pouvez utiliser le dos des feuilles de composition si vous manquez de place dans les emplacements prévus.***
- ***Même si cela n'est pas explicitement rappelé dans chaque question, il vous est systématiquement demandé de justifier vos réponses.***

Exercice 1 (6 points)

Soit un consommateur dont les préférences sont décrites par la fonction d'utilité suivante $U(x_1,x_2)= x_1x_2^5$ où x_1 et x_2 sont les quantités consommées respectivement des biens 1 et 2. Ce consommateur possède un revenu m et les prix d'une unité de bien 1 et d'une unité de bien 2 sont respectivement p_1 et p_2.

1) Rappelez la nature des préférences du consommateur et les propriétés d'une courbe d'indifférence associée (il est inutile de la tracer).

REPONSE.
Ce sont des préférences Cobb-Douglas.
Les courbes d'indifférence sont décroissantes, convexes et ne coupent pas les axes.

2) Calculez les quantités optimales de bien 1 et de bien 2 du consommateur, pour p_1=5, p_2=20 et m= 1200. (Il vous est demandé de justifier vos résultats en précisant les étapes de calculs).

REPONSE.
Le consommateur maximise son utilité sous la contrainte de budget $5x_1 + 20x_2 = 1200$.
Comme l'optimum est intérieur, on a à l'optimum :

$$\left|TMS(x_1^*, x_2^*)\right| = \frac{p_1}{p_2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{U'_{x_1}(x_1^*, x_2^*)}{U'_{x_2}(x_1^*, x_2^*)} = \frac{x_2^5}{5x_1 . x_2^4} = \frac{x_2}{5x_1} = \frac{p_1}{p_2} = \frac{5}{20}$$

D'où :

$$20x_2 = 25x_1 \quad (*)$$

En remplaçant cette dernière égalité dans la contrainte de budget on obtient que :
$5x_1 + 25x_1 = 1200$ c'est-à-dire $x_1^* = 1200/30 = 40$. Et, finalement, en remplaçant dans (*), on obtient $x_2^* = \frac{25}{20}.40 = 50.$

3) Considérez le panier accessible (x_1=60, x_2= 45). Expliquez économiquement, en utilisant les termes de TMS et de rapport des prix, pourquoi ce panier n'est pas optimal. Comment doivent évoluer x_1 et x_2 pour se rapprocher de l'optimum? Vous pouvez vous aider d'une illustration graphique.

REPONSE
Ce panier vérifie bien la contrainte de budget. On a en effet : $5.60 + 20.45 = 1200$.
En ce panier, on a également (la formule du TMS ayant été calculée plus haut) :

$$TMS(60, 45) = \frac{60}{5.45} = \frac{3}{20} < \frac{p_1}{p_2} = \frac{5}{20}$$

Ce panier n'est donc pas optimal puisque le TMS évalué en ce panier n'est pas égal au rapport des prix. En fait, l'inégalité plus haut signifie qu'on est prêt à échanger une unité de bien 1

contre la quantité TMS = 3/20 de bien 2, alors que le marché offre 5/20 de bien 2.
Le marché offre donc plus que ce qu'il faut pour que l'utilité du consommateur concerné reste inchangée. L'échange proposé par le marché permettrait alors d'augmenter l'utilité du consommateur. Il doit alors accepter l'échange, c'est-à-dire réduire sa consommation de bien 1 et augmenter sa consommation de bien 2, afin d'augmenter son utilité.

Illustration graphique.
Cf. graphe en fin de document.

Exercice 2

Soit un consommateur dont les préférences sont décrites par la fonction d'utilité suivante $U(x_1,x_2)= (x_1+15)\ x_2$ où x_1 et x_2 sont les quantités consommées respectivement des biens 1 et 2. Ce consommateur possède un revenu m et les prix d'une unité de bien 1 et d'une unité de bien 2 sont respectivement p_1 et p_2.

Question I

1) Tracez une courbe d'indifférence (vous préciserez sa nature et si elle coupe les axes). Au vu des propriétés de cette courbe, quels seront les différents types d'optima possibles?

REPONSE
Le long d'une courbe d'indifférence on a : $\bar{u} = (x_1 + 15).x_2$

L'équation d'une courbe d'indifférence s'écrit alors : $x_2 = \dfrac{\bar{u}}{(x_1 + 15)}$

Elle a les propriétés suivantes :

Si $x_1 = 0$ alors $x_2 = \dfrac{\bar{u}}{15}$: la courbe d'indifférence coupe l'axe des ordonnées en $x_2 = \dfrac{\bar{u}}{15}$.

Si $x_2 = 0$ alors $x_1 \to +\infty$. La courbe est asymptotique à l'axe des abscisses (ne le coupe pas).

Sa dérivée première est : $\dfrac{dx_2}{dx_1} = -\bar{u}.(x_1 + 15)^{-2} < 0$. La courbe est décroissante

Sa dérivée seconde est : $\dfrac{d^2x_2}{dx_1{}^2} = 2\bar{u}.(x_1 + 15)^3 < 0$. La courbe est convexe.

Illustration. Cf graphe 2.1. en dernière page.

Il y aura deux types d'optima : 1 optimum en coin (sur l'axe des ordonnées) et un optimum intérieur.

2) Précisez les conditions d'obtention des différents types d'optima et déterminez les quantités optimales de bien 1 et de bien 2, en fonction des valeurs de m, p_1 et p_2. *(Indication: vous montrerez notamment que les valeurs optimales de x_1 et x_2 à l'optimum intérieur, s'il existe, sont $\frac{m-15p_1}{2p_1}$ et $\frac{m+15p_1}{2p_2}$)*

REPONSE

D'après le graphe, on a soit un optimum en coin, soit un optimum intérieur.

On a un optimum en coin $\left(0, \frac{m}{p_2}\right)$ si $\left|TMS\left(0, \frac{m}{p_2}\right)\right| < \frac{p_1}{p_2}$.

On a $\left|TMS(x_1^*, x_2^*)\right| = \frac{U'_{x_1}(x_1^*, x_2^*)}{U'_{x_2}(x_1^*, x_2^*)} = \frac{x_2^*}{(x_1^* + 15)}$, donc un optimum en coin $\left(0, \frac{m}{p_2}\right)$ si $\frac{m}{15p_2} < \frac{p_1}{p_2}$, autrement dit si $m < 15p_1$.

On a un optimum intérieur sinon et il vérifie :

$\left|TMS(x_1^*, x_2^*)\right| = \frac{x_2^*}{(x_1^* + 15)} = \frac{p_1}{p_2}$, d'où

$p_1(x_1^* + 15) = p_2 x_2^*$ (**)

En intégrant cette égalité dans l'équation de la droite de budget $p_1 x_1^* + p_2 x_2^* = m,$ on obtient que :

$p_1 x_1^* + p_1(x_1^* + 15) = m$ c'est-à-dire $x_1^* = \frac{m - 15p_1}{2p_1}$. En remplaçant dans (**) on trouve également que $x_2^* = \frac{m + 15p_1}{2p_2}$ (ce qu'il fallait démontrer d'après l'énoncé).

Question II

Dans cette question, on fixe p_1=20 et p_2= 30.

1) Précisez les quantités optimales de bien 1 et de bien 2 en fonction de m.

REPONSE

Il suffit de remplacer les données numériques dans les formules de x_1^* et x_2^* trouvées à la question précédente dans les deux cas (optimum en coin et optimum intérieur). On a ainsi :

Si $m < 15p_1 = 300$ alors on a un optimum en coin qui vérifie $x_1^* = 0$ et $x_2^* = \frac{m}{30}$

Si $m \geq 15p_1 = 300$ alors on a un optimum intérieur qui vérifie $x_1^* = \frac{m - 300}{40}$ et $x_2^* = \frac{m + 300}{60}$.

2) Tracez la courbe d'Engel de chacun des deux biens.

REPONSE
Cf. graphe 2.2. en fin de document.

3) Quelle est la nature de chacun des deux biens (inférieurs, normaux, prioritaires (de nécessité), de luxe)? Justifiez (pour calculer l'élasticité revenu, vous vous placerez en un optimum intérieur).

REPONSE
D'après les courbes d'Engel on voit que les quantités des deux biens augmentent lorsque le revenu augmente. Ce sont donc tous les deux des biens normaux.

Par ailleurs, pour savoir s'ils sont de luxe ou prioritaires (ou de nécessité), il faut calculer leur élasticité-revenu.
On a :
$\varepsilon_{x_1,m} = \frac{dx_1}{dm}.\frac{m}{x_1^*} = \frac{1}{40}.\frac{m}{\frac{(m-300)}{40}} = \frac{m}{40}.\frac{40}{(m-300)} = \frac{m}{(m-300)} > 1$. Le bien 1 est un bien de luxe. Et :
$\varepsilon_{x_2,m} = \frac{dx_2}{dm}.\frac{m}{x_2^*} = \frac{1}{60}.\frac{m}{\frac{(m+300)}{60}} = \frac{m}{60}.\frac{60}{(m+300)} = \frac{m}{(m+300)} < 1$ (et >0). Le bien 2 est un bien de nécessité (ou prioritaire).

Exercice 3

1) Soit la fonction de production :
$y = x_1^{2/4}x_2^{1/4}$ où y est la quantité de bien produit (output), x_1 la quantité de facteur de production 1 (input 1) et x_2 la quantité de facteur de production 2 (input 2).

1) On se place à court terme. x_2 est une constante fixée à 81. Soient p, respectivement w_1 et w_2, le prix d'une unité de bien produit, d'une unité de facteur de production 1 et d'une unité de facteur de production 2. On fixe p = 40, w_1= 10 et w_2=5.
Ecrivez la fonction de production et la fonction de profit.

REPONSE
La fonction de production de court terme s'écrit $y = x_1^{2/4}.81^{1/4} = 3x_1^{1/2}$.

La fonction de profit de court terme s'écrit :

$$\pi = p.y - w_1.x_1 - w_2\overline{x}_2$$
$$= 40.(3x_1^{1/2}) - 10x_1 - 5.81$$
$$= 120x_1^{1/2} - 10x_1 - 405$$

2) Quelle est la condition qui conduit au profit maximal? Interprétez-la économiquement.

REPONSE

La condition d'optimisation du profit à court terme est telle que la quantité x_1^* de facteur variable vérifie :

$$p.Pm_1(x_1^*, \overline{x}_2) = w_1$$

La productivité marginale du facteur 1 en valeur est égale à son coût d'achat unitaire. Elle est logique. En effet, à l'optimum une unité de facteur 1 doit coûter à l'achat exactement ce qu'elle rapporte en termes de production supplémentaire en valeur. Si elle coûte plus cher, elle génère une perte pour le producteur et ne doit alors pas être achetée : le producteur doit diminuer ses quantités de facteurs 1. Si elle coûte moins cher, il doit continuer à utiliser le facteur 1 jusqu'à ce que son coût soit égal à sa Pm.

3) Calculez les quantités optimales de facteur de production 1, de bien produit, ainsi que le profit optimal. Ce profit est-il positif ou négatif? Est-il possible d'avoir un profit optimal négatif à court terme? Justifiez.

REPONSE

En reprenant la condition d'optimisation énoncée dans la question précédente on a à l'optimum :

$$p.Pm_1(x_1^*, \overline{x}_2) = w_1$$

$$\Leftrightarrow 40.f'_{x_1}(x_1^*, \overline{x}_2) = w_1$$

$$\Leftrightarrow 40.3.\frac{1}{2}.(x_1^*)^{-1/2} = w_1$$

$$\Leftrightarrow x_1^* = 36$$

D'où $y^* = 3(x_1^*)^{1/2} = 18$

Et $\pi = 40.y^* - 10x_1^* - 405 = 40.18 - 10.36 - 405 = -45 < 0$

Le profit de court terme est négatif. Ce qui est possible à court terme à cause des coûts fixes dûs au facteur fixe. Ici, les pertes sont inférieures aux coûts fixes que le producteur perdrait s'il décidait de fermer à court terme. Les coûts fixes sont de 405, alors que les pertes après production (optimale) ne sont que de 45.

4) On se place maintenant à long terme. Précisez la nature des rendements d'échelle. Ces rendements sont-ils propices à l'existence d'un profit optimal de long terme?

REPONSE

A long terme le facteur 2 est variable. Multiplions la taille de l'entreprise par $\lambda > 1$ pour voir comment est multipliée la production. On a :

$$y' = f(\lambda x_1, \lambda x_2) = (\lambda x_1)^{2/4}.(\lambda x_2)^{1/4} = \lambda^{2/4}.\lambda^{1/4}.x_1^{2/4}.x_2^{1/4} = \lambda^{3/4}.(x_1^{2/4}.x_2^{1/4}) = \lambda^{3/4}.y < \lambda.y$$

La production augmente d'un facteur inférieur à λ. Les rendements d'échelle sont donc décroissants.
Ils sont compatibles avec un profit optimal de long terme supérieur à zéro. Ce sont les seuls types de rendements compatibles avec l'obtention d'un profit d'équilibre à long terme.

5) Calculez le profit optimal de long terme (s'il existe). Précisez les quantités optimales de facteurs de production 1 et 2, de bien produit, et du profit. Le profit optimal de long terme peut-il être négatif ? Justifiez.

REPONSE
Le profit de long terme s'écrit maintenant :

$$\pi = 40.y - 10x_1 - 5x_1 = 40.x_1^{2/4}.x_2^{1/4} - 10x_1 - 5x_1$$

Les quantités optimales x_1^* et x_2^* de facteurs de long terme vérifient alors le système suivant :

$\begin{cases} p.Pm_1(x_1^*, x_2^*) = w_1 \\ p.Pm_2(x_1^*, x_2^*) = w_2 \end{cases}$ autrement dit le système $\begin{cases} 40.Pm_1(x_1^*, x_2^*) = 10 \\ 40.Pm_2(x_1^*, x_2^*) = 5 \end{cases}$.

Il est équivalent à :

$$\begin{cases} 4.f'_{x_1}(x_1^*, x_2^*) = 1 \\ 8.f'_{x_2}(x_1^*, x_2^*) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4.\dfrac{2}{4}.(x_1^*)^{-1/2}.(x_2^*)^{1/4} = 1 \\ 8.\dfrac{1}{4}(x_1^*)^{2/4}.(x_2^*)^{-3/4} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x_1^*)^{-1/2}.(x_2^*)^{1/4} = 1 \quad (***) \\ 2(x_1^*)^{1/2}.(x_2^*)^{-3/4} = 1 \end{cases}$$

En divisant la première équation par la seconde, terme par terme de chaque côté des équations, on obtient :

$$\Leftrightarrow \frac{x_2^*}{x_1^*} = 1$$

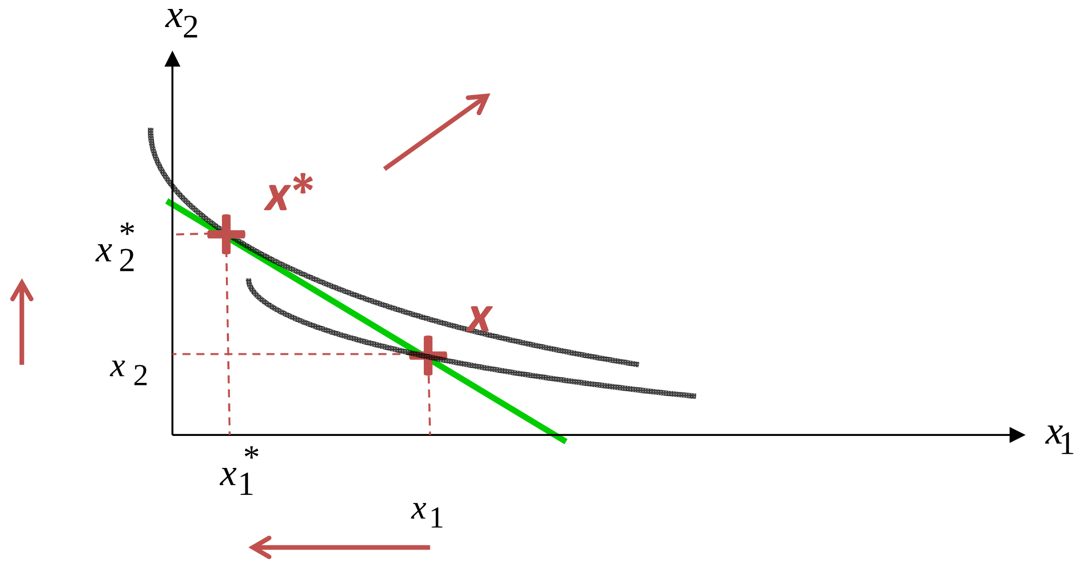
$$\Leftrightarrow x_2^* = x_1^*$$

En remplaçant par exemple dans l'équation (***) on obtient que : $x_1^* = 16 = x_2^*$.

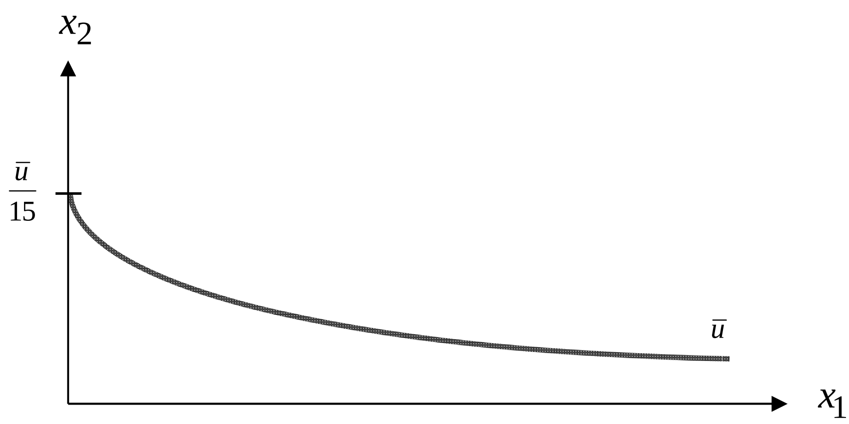
On en déduit que $y^*_{(\text{long terme})} = 16^{2/4}.16^{1/4} = 8$

et finalement $\pi_{(\text{long terme})} = 40.8 - 10.16 - 5.16 = 80 > 0$.

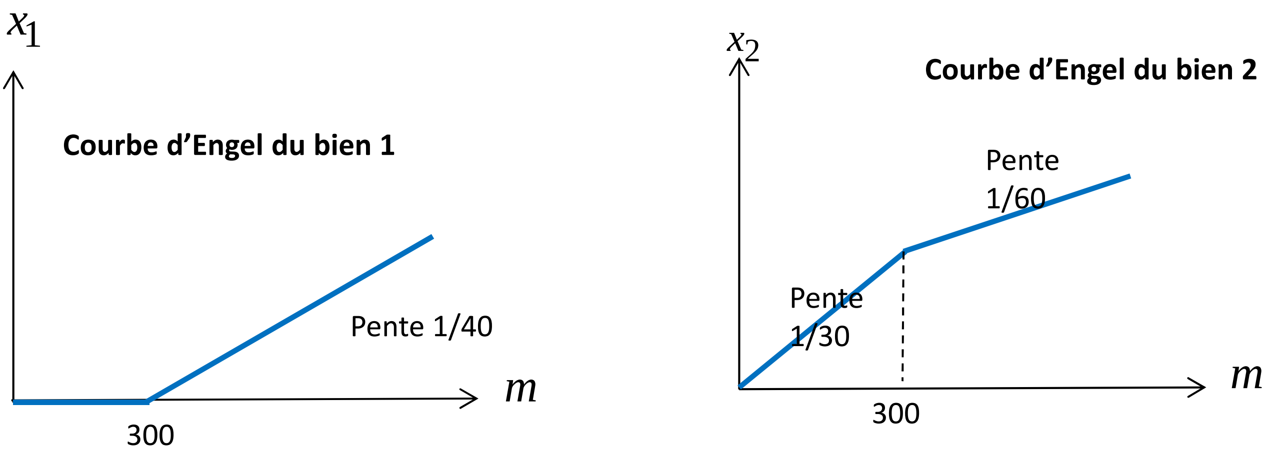
A long terme le profit est, au pire, nul car l'entreprise n'ayant que des coûts variables peut fermer sans frais.



Graphe Exercice 1 question 3) partiel mai 2012



Graphe Exercice 2 question I.1) partiel mai 2012



Graphe Exercice 2 question II.2) partiel mai 2012