Université de Strasbourg
Faculté de Sciences Economiques
et de Gestion
Année Universitaire 2011/2012

Licence 1ère année Economie Gestion
Mathématiques II

Examen – JUIN 2012
Semestre 2, Session 2

Durée : 2 heures
CALCULATRICES INTERDITES - AUCUN DOCUMENT AUTORISE.
Le barème est indicatif.
Consignes:
- *soigner la présentation de votre copie,*
- *respecter l'ordre des exercices,*
- *numéroter les feuilles et les exercices,*
- *être concis dans vos explications,*
- *encadrer les résulats finaux.*

Jusqu'à 2 points de pénalité pourront être soustraits en cas de non respect de ces consignes.

Exercice 1 . — (3 points)

Soient deux éléments de $\mathbb{R}^3$: $M = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(1) Calculer $3M \cdot (N - M)$.

(2) Quelle est la nature de l'angle formé par les vecteurs M et N ?

(3) Calculer la distance euclidienne entre les points M et N.

(4) Trouver l'équation du plan P passant par le point $A = (1, 0, 1)$ et de vecteur normal M.

Exercice 2 . — (5 points)

Soit la fonction définie par: $f(x_1, x_2) = \sqrt{1 - \left(x_1^2 + (x_2 - 1)^2\right)}$

(1) Déterminer et représenter graphiquement l'ensemble de définition de la fonction f.

(2) Donner l'expression générale des courbes de niveau de la fonction f. A quoi correspondent-elles graphiquement?

(3) Vérifier que la courbe C de niveau $q = \sqrt{\frac{1}{2}}$ passe par le point $A = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

(4) Calculer le gradient de la fonction f au point $A = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

(5) Déterminer l'équation de la droite tangente à la courbe C de niveau $q = \sqrt{\frac{1}{2}}$ au point $A = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

(6) Vérifier que le vecteur gradient de la fonction f en $A = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ est orthogonal à cette droite tangente.

(7) Déterminer l'équation du plan tangent au graphe de la fonction f au point $A = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Exercice 3 . — (4 points)

Soient la fonction réelle à deux variables réelles $f(x_1, x_2)$ et la fonction réelle g à une variable réelle, fonction implicite de la fonction f, définie par :

$x_2 = g(x_1)$ telle que $f(x_1, g(x_1)) = q$.

Le Théorème des Fonctions Implicites donne l'expression de la dérivée première de la fonction g en fonction des dérivées partielles premières $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial x_2}$ de la fonction f.

(1) Quelle est cette expression?

(2) Par utilisation des règles de dérivation en chaîne, déduire cette expression en partant de la définition de la fonction implicite g.

Exercice 4 . — (5 points)

Déterminer les extrema libres de la fonction $f(x_1, x_2) = \dfrac{x_1}{1 + x_1^2 + x_2^2}$.

Exercice 5 . — (3 points)

Trouver les extrema locaux de la fonction $f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$ sous la contrainte $x_1 + x_2 = 1$.

A résoudre avec la méthode du Lagrangien pour trouver les candidats à être extrema et l'utilisation du Hessien Bordé pour la détermination de la nature des candidats.