

L1 ECONOMIE-GESTION ET MATH-ECO STATISTIQUES et PROBABILITES II

Durée de l'épreuve : 2 heures
Aucun autre document n'est autorisé.
Calculatrice autorisée

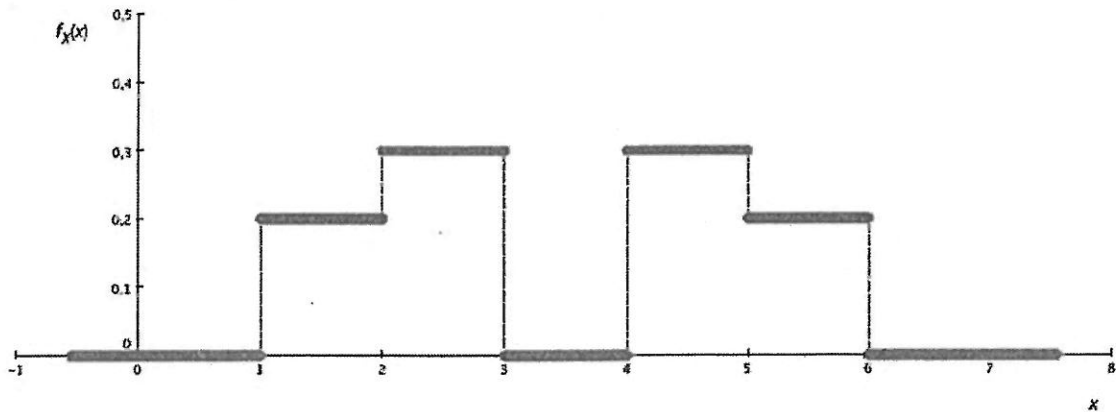
Année 2011/2012

SUJET DE JUIN

*Il vous est demandé d'apporter un soin particulier à la présentation de votre copie.
Toute information calculée devra être justifiée.*

Exercice I (3 points)

On considère la variable aléatoire X dont la densité est représentée ci-dessous :



- 1) Vérifier que le graphe ci-dessus correspond bien à une densité.
- 2) En justifiant (à l'aide du graphique) vos réponses, déterminer les probabilités suivantes :
 - a) $P(X < 1)$, $P(X > 6)$, $P(3 \leq X \leq 4)$
 - b) $P(1 \leq X \leq 3)$
 - c) $P(1 \leq X \leq 2)$
 - d) $P(2 \leq X \leq 5)$
- 3) Déterminer graphiquement l'espérance de X .
- 4) Expliquer pourquoi σ l'écart type de X doit être inférieur à 2,5.

Exercice II (5 points)

Monsieur TRESLENT peut prendre 3 routes différentes pour se rendre à son travail. Lorsqu'il utilise la première route, la durée du trajet est en moyenne de 30 minutes avec un écart-type de 3 minutes. On suppose que la durée du trajet X suit une loi normale.

- 1) Quelles sont les caractéristiques de la loi suivie par X ?
- 2) Quelle est la probabilité que la durée du trajet soit supérieure à 36 minutes ?
- 3) Quelle est la probabilité que la durée du trajet soit inférieure à 27 minutes ?
- 4) Quelle est la probabilité que la durée du trajet soit comprise entre 27 et 36 minutes ?
- 5) En empruntant la seconde route, la durée Y du trajet est en moyenne de 25 minutes avec un écart-type de 8 minutes et suit aussi une loi normale. Sachant que Monsieur TRESLENT dispose de 36 minutes pour se rendre à son travail, quel trajet doit-il prendre pour avoir la probabilité la plus forte d'être à l'heure à son travail ?
- 6) En empruntant la troisième route, la durée moyenne du trajet est de 20 minutes. En outre, dans 10 % des cas, le trajet dure plus de 40 minutes. On suppose encore que la durée Z de ce troisième trajet suit une loi normale.
 - a) Calculer l'écart-type de Z .
 - b) Est-ce que ce troisième trajet permet d'améliorer la probabilité qu'à Monsieur TRESLENT d'être à l'heure à son travail ?

Exercice III (5 points)

Une banque propose deux types de carte bancaire à ses clients : « VISA » et « MasterCard ». Parmi l'ensemble de ses clients, 60 % possèdent (au moins) une carte VISA, 40 % possèdent (au moins) une MasterCard et 10 % possèdent les deux types de carte. Soit A l'événement « le client possède une carte VISA » et B l'événement « le client possède une carte MasterCard ».

- 1) Expliciter les événements suivants à l'aide du langage ensembliste puis calculer la probabilité correspondante, en justifiant les calculs :
 - a) « un client possède au moins un des deux type de carte » ;
 - b) « un client ne possède aucun des deux types de carte » ;
 - c) « un client ne possède qu'un seul type de carte ».
- 2) On considère un client qui possède une carte VISA. Quelle est la probabilité qu'il possède aussi une carte MasterCard ?
- 3) On considère un client qui possède au moins une carte. Quelle est la probabilité que ce soit une carte VISA ?

Exercice IV (7 points)

Un organisme bancaire a établi pour ses clients le nombre moyen (Y) de paiements quotidiens effectués par carte bancaire en fonction du nombre (X) de cartes possédées. La répartition est résumée dans le tableau suivant :

Y	0	1	2	3
X				
1	0,25	0,25	0,1	0,05
2	0,05	0,05	0,15	?

- 1) Probabilités
 - a) Déterminer la valeur de la probabilité manquante.
 - b) Donner la probabilité qu'un client possède 1 carte et effectue 2 paiements quotidiens par carte.

- c) Donner la probabilité qu'un client possède 1 carte.
- d) Calculer la probabilité qu'un client effectue 2 paiements quotidiens par carte sachant qu'il possède 1 carte.

2) Lois marginales

- a) Calculer l'espérance et la variance de X et de Y .
- b) Quel est le nombre de paiements moyen quotidien ?

3) Lois conditionnelles

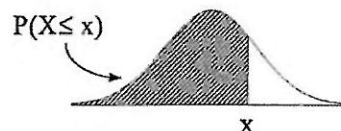
- a) Donner la loi conditionnelle de Y sachant que $X = 1$.
- b) Que représente-t-elle ?
- c) Pensez-vous que les variables X et Y soient indépendantes ?
- d) Calculer l'espérance conditionnelle $E(Y / X = 1)$
- e) Que représente-t-elle concrètement ?

4) Corrélation

- a) Calculer l'espérance de XY .
- b) En déduire la covariance du couple (X, Y) .
- c) Interpréter le résultat.

Table de la variable aléatoire Normale réduite

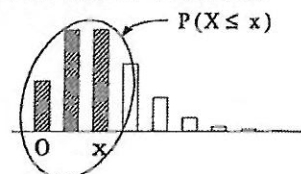
Fournit la probabilité $P(X \leq x)$
pour $X \sim N(0,1)$



x	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0,0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0,1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0,2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0,3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0,4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0,5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0,6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0,7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0,8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0,9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1,0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1,1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1,2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1,3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1,4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1,5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1,6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1,7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1,8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1,9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2,0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2,1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2,2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2,3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2,4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2,5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2,6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2,7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2,8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2,9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3,0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3,1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3,2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3,3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3,4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

Table de la variable aléatoire de Poisson

Fournit la probabilité $P(X \leq x)$
pour $X \sim \text{Po}(\lambda)$



λ	0,05	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00
x											
0	0,9512	0,9048	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488	0,4966	0,4493	0,4066	0,3679
1	0,9988	0,9953	0,9825	0,9631	0,9384	0,9098	0,8781	0,8442	0,8088	0,7725	0,7358
2	1,0000	0,9998	0,9989	0,9964	0,9921	0,9856	0,9769	0,9659	0,9526	0,9371	0,9197
3		1,0000	0,9999	0,9997	0,9992	0,9982	0,9966	0,9942	0,9909	0,9865	0,9810
4			1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9996	0,9992	0,9986	0,9977	0,9963
5					1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9997	0,9994
6								1,0000	1,0000	1,0000	0,9999
7											1,0000

λ	1,20	1,40	1,60	1,80	2	3	4	5	6	8	10
x											
0	0,3012	0,2466	0,2019	0,1653	0,1353	0,0498	0,0183	0,0068	0,0025	0,0003	0,0000
1	0,6626	0,5918	0,5249	0,4628	0,4060	0,1992	0,0916	0,0404	0,0174	0,0030	0,0005
2	0,8795	0,8335	0,7834	0,7306	0,6767	0,4232	0,2381	0,1247	0,0620	0,0138	0,0028
3	0,9662	0,9463	0,9212	0,8913	0,8571	0,6472	0,4335	0,2650	0,1512	0,0424	0,0103
4	0,9923	0,9857	0,9763	0,9636	0,9473	0,8153	0,6288	0,4405	0,2851	0,0996	0,0293
5	0,9985	0,9968	0,9940	0,9896	0,9834	0,9161	0,7851	0,6160	0,4457	0,1912	0,0671
6	0,9997	0,9994	0,9987	0,9974	0,9955	0,9665	0,8893	0,7622	0,6063	0,3134	0,1301
7	1,0000	0,9999	0,9997	0,9994	0,9989	0,9881	0,9489	0,8666	0,7440	0,4530	0,2202
8	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9962	0,9786	0,9319	0,8472	0,5925	0,3328
9				1,0000	1,0000	0,9989	0,9919	0,9682	0,9161	0,7166	0,4579
10						0,9997	0,9972	0,9863	0,9574	0,8159	0,5830
11						0,9999	0,9991	0,9945	0,9799	0,8881	0,6968
12						1,0000	0,9997	0,9980	0,9912	0,9362	0,7916
13							0,9999	0,9993	0,9964	0,9658	0,8645
14							1,0000	0,9998	0,9986	0,9827	0,9165
15								0,9999	0,9995	0,9918	0,9513
16								1,0000	0,9998	0,9963	0,9730
17									0,9999	0,9984	0,9857
18									1,0000	0,9993	0,9928
19										0,9997	0,9965
20										0,9999	0,9984
21										1,0000	0,9993
22											0,9997
23											0,9999
24											1,0000