FSEG
STRASBOURG
Faculté des sciences économiques et de gestion

UNIVERSITÉ DE STRASBOURG

Année Universitaire 2011/2012
Licence Economie – Gestion, L2-S3

UE Probabilités et Statistique

Examen : Probabilités et Statistique II – Session 1 - Janvier 2012

Durée de l'épreuve : 2h00. Enseignant : M. EL OUARDIGHI
Documents autorisés : le formulaire de probabilités et tables statistiques (7 pages).
Les calculatrices autorisées sont celles retenues par le conseil de la Faculté.
Barème indicatif : I. 2+2+2=6 points. II. 1+1+1+1= 4 points. III. 2+2+2+2+2=10 points.
Temps moyen indicatif : I. 40mn. II. 20mn. I. 50mn.

Sujet

I. Un cabinet d'étude estime à 4% la proportion de pièces défectueuses dans une production mensuelle de 6100 pièces. On prélève au hasard un échantillon de 60 pièces de la production d'un mois donné. Soit X la variable aléatoire égale au 'nombre de pièces défectueuses' dans l'échantillon.

I.1. Donner la loi de X. Calculer son espérance et sa variance.

I.2. Par quelle loi *discrète* appropriée peut-on approximer la loi de X ? Utiliser cette approximation pour calculer $P(X = 4)$.

I.3. Supposons qu'on souhaite approximer la loi de X par une loi continue. Préciser les paramètres de l'approximation par une loi normale et calculer la probabilité $P(X = 4)$. Comparer votre résultat avec celui de la question I.2. L'approximation par une loi continue est-elle satisfaisante ? justifier votre réponse.

II. Soit X une variable aléatoire normale de moyenne μ et d'écart-type σ. Considérons la variable $Y = Z^2$ où $Z = (X - \mu)/\sigma$.

II.1. Quelle est la loi de la variable Y ?

II.2. Calculer l'espérance de la variable aléatoire Y, notée $E(Y)$.

II.3. Calculer la variance de la variable aléatoire Y, notée $V(Y)$. (*Note* : $E(Z^4) = 3\sigma^2$).

II.4. Soit $S = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ où les variables Y_i ont la même loi que la variable Y définie dans II.1. Sans calcul, donner la loi de S et préciser son espérance et sa variance.

III. Une urne contient des boules numérotées de 1 à n. Considérons l'expérience qui consiste à tirer successivement les boules *une à une* de l'urne *avec remise jusqu'à* obtenir le numéro souhaité. Soit la variable aléatoire X 'nombre de tirages effectués'. Il est claire que $X(\Omega) = [1,2,3,\ldots,+\infty[$ et que la probabilité p de tirer une boule avec un numéro donné à chaque tirage est égale à $1/n$.

III.1. Donner la loi de X, son espérance et sa variance.

III.2. Vérifier que pour $n = 10$, la probabilité de tirer par exemple une boule numérotée 3 au 5ème tirage est égale à 6.561%.

III.3. On souhaite estimer le paramètre p de la loi de X par la méthode du maximum de vraisemblance. Soit $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ un échantillon aléatoire simple issu de X. Écrire la vraisemblance de l'échantillon, $L(x_1,\ldots,x_n;p)$. Déduire ensuite la fonction log-vraisemblance, $\ln L(x_1,\ldots,x_n;p)$.

III.4. (*i*) Calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance de p. (*ii*) Vérifier que cet estimateur est sans biais.

III.5. (*i*) Montrer que l'estimateur du maximum de vraisemblance obtenu précédemment est convergent. (*ii*) Etudier son efficacité.