FSEG STRASBOURG
Faculté des sciences économiques et de gestion

UNIVERSITÉ DE STRASBOURG

Année Universitaire 2011/2012
Licence Economie – Gestion, L2-S3

UE Probabilités et Statistique

Examen : Probabilités et Statistique II – Session 2 – Juin 2012

Durée de l'épreuve : **2h00.** Enseignant : M. EL OUARDIGHI

Documents autorisés : le formulaire de probabilités et tables statistiques (7 pages).
Les calculatrices autorisées sont celles retenues par le conseil de la Faculté.
Barème indicatif : **I.** 2+2+2=6 points. **II.** 1+3=4 points. **III.** 2+2+2=6 points. **IV.** 2+2=4 points(+2).
Temps moyen indicatif : **I.** 25mn. **II.** 20mn. **III.** 30mn. **IV.** 20mn.

Sujet

I. Selon un recensement de la population d'un pays, la répartition des ménages selon le nombre de pièces des appartements qu'ils occupent est présentée dans la Tableau 1. Considérons une enquête auprès de 500 ménages et soit la variable aléatoire X 'nombre des ménages de l'enquête occupant un appartement de 2 pièces'.

I.1. Quelle est la loi de probabilité de X ? Donner son espérance et sa variance.

I.2. Par quelle autre loi *continue* peut-on approximer la variable X ? Soit Y cette nouvelle loi, calculer la probabilité $P(Y = 70)$.

I.3. Déterminer la valeur de k telle que $P(Y \geq k) = 0.10$.

Tableau 1. Répartition des ménages selon le nombre de pièces des appartements

Nombre de pièces	1	2	3	4	5
Proportion (en %)	5	13	38	29	8

II. Une population est constituée de 4 étudiants inscrits à un cours de mathématiques. Un enseignant souhaite estimer le temps moyen hebdomadaire consacré à l'étude des mathématiques par ces étudiants. Le Tableau 2 indique pour chacun des étudiants, référés par A, B, C et D, le temps moyen consacré aux mathématiques.

II.1. Déterminer la moyenne μ et la variance σ^2 de la population des étudiants.

II.2. Considérons un prélèvement au hasard dans la population d'un échantillon de taille $n = 3$. (*a*) Quelle est la distribution d'échantillonnage de la variable aléatoire $\overline{X}$ (*indication : préciser l'ensemble des valeurs possibles de la moyenne échantillonnée*). (*b*) Définir et calculer la moyenne et la variance de cette distribution.

Tableau 2. Population d'étudiants et leur temps d'étude hebdomadaire

Etudiants	A	B	C	D
Temps d'étude (heures)	7	3	10	4

III. La durée de vie d'un certain bien économique peut être représentée par une variable aléatoire continue X dont la densité de probabilité est définie de la manière suivante :

$$f(x) = \frac{1}{k} e^{-\frac{x}{k}} \text{ pour } x > 0, \text{ et } f(x) = 0 \text{ pour } x \leq 0.$$

La variable aléatoire X présente les caractéristiques suivantes : $E(X) = k$ et $E(X^2) = 2k^2$. Le paramètre $k \in R^{*+}$ est inconnu et on se propose de l'estimer à partir d'un échantillon de n biens indépendants dont on mesure la durée de vie. Soit $(x_1,\ldots,x_n)$ une réalisation de $(X_1,\ldots,X_n)$ où les X_i sont indépendantes et suivent la même loi que X.

III.1. Déterminer par la méthode du maximum de vraisemblance un estimateur $\hat{k}_n$ du paramètre k.

III.2. Montrer que l'estimateur $\hat{k}_n$ est sans biais et convergent en moyenne quadratique.

III.3. Peut-on conclure que $\hat{k}_n$ est efficace ? En particulier, comparer la quantité d'information apportée par les observations $(x_1,\ldots,x_n)$ et la variance de l'estimateur du maximum de vraisemblance de k.

IV. Soit X une variable uniforme continue définie sur l'intervalle $[0;2k]$.

IV.1. Définir et calculer l'espérance et la variance de X.

IV.2. Quel est l'estimateur naturel (sans calculs) de k ? Montrer qu'il est sans biais et convergent.

IV.3. (*Question supplémentaire notée sur 2 points*). Ecrire la densité de probabilité de X. Ecrire la fonction de vraisemblance pour un échantillon $(x_1,\ldots,x_n)$ et discuter ensuite les problèmes soulevés par l'estimateur du maximum de vraisemblance de k.
