FSEG
STRASBOURG
Faculté des sciences économiques et de gestion

UNIVERSITÉ DE STRASBOURG

Année Universitaire 2011/2012
Licence Economie – Gestion, L2-S4

UE Probabilités et Statistique

Examen : Probabilités et Statistique III – Session 1 – Mai 2012

Durée de l'épreuve : **2h00.** Enseignant : M. EL OUARDIGHI
Documents autorisés : le formulaire de probabilités et tables statistiques (7 pages).
Les calculatrices autorisées sont celles retenues par le conseil de la Faculté.
Barème indicatif : **I.** 1+2+3+2=8 points. **II.** 3+2=5 points. **III.** 3+4=7 points.
Temps moyen indicatif : **I.** 45 à 50mn. **II.** 20mn. **III.** 35 à 45mn.

Sujet

I. Un amateur des jeux de hasard prétend identifier toute pièce de monnaie pipée. Une pièce pipée a la particularité de tomber sur pile ou face avec une probabilité significativement différente de 50%. L'approche adoptée par notre amateur est simple. Il considère qu'une pièce de monnaie est pipée si la quantité $Q = n(2f_n - 1)^2 \geq 4$ où f_n est la fréquence d'apparition de pile ou face en lançant n fois la pièce en question. Ainsi, dans le cadre d'une expérience avec $n = 100$, en observant une fréquence $f_n = 58\%$ pour pile par exemple, notre amateur conclut que la pièce n'est pas pipée du fait que la quantité $Q = 100(2 \times 0.58 - 1)^2 = 2.56 < 4$. *Pensez-vous que notre amateur a raison de procéder ainsi* ? En particulier, pour vérifier son intuition, on vous propose d'utiliser deux approches différentes. On sait par ailleurs que la variable aléatoire «nombre de piles ou faces obtenus» en lançant une pièce équilibrée n fois suit une loi binomiale $B(n, p)$ et que la fréquence f_n est un estimateur sans biais et convergent de la proportion p.

I.1. Le modèle statistique. Définir les hypothèses nulle et alternative (i.e. H_0 et H_1).

I.2. Approche A : intervalle d'acceptation. Préciser la variable de décision, son espérance et sa variance. Pour un seuil d'erreur $\alpha = 5\%$, définir l'intervalle d'acceptation de l'hypothèse nulle. Faut-il admettre que la pièce de monnaie est non pipée dans le cadre de l'expérience décrite précédemment ?

I.3. Approche B : le test de rapport de vraisemblance. Soit $\lambda_{Obs} = L_0 / L_{Max}$ où L_{Max} est la valeur maximum de la fonction de vraisemblance et L_0 est la valeur de la fonction de vraisemblance relative à la valeur de la proportion spécifiée par l'hypothèse nulle. La quantité $\chi^2_{Obs} = -2\ln(\lambda_{Obs})$ suit asymptotiquement une distribution de χ^2_1. **(a)** Déterminer les valeurs du rapport λ_{Obs} et $\ln(\lambda_{Obs})$. Evaluer ensuite la quantité χ^2_{Obs}. **(b)** Montrer que la conclusion est la même que celle retenue avec **l'approche A** (pour un seuil d'erreur $\alpha = 5\%$).

I.4. L'approche adoptée par notre amateur, *simple par ailleurs* !, a certainement un fondement théorique. Pouvez-vous le justifier ? En particulier, quel est en réalité le test adopté par notre amateur ? *Indication : préciser la différence fondamentale entre son approche et les approches A et B. Justifier ensuite la statistique calculée par notre amateur.*

II. La moniliose ou pourriture des fruits est un champignon ravageur des arbres fruitiers qui peut avoir de graves conséquences sur la récolte. La moniliose apparaît en général au printemps et la plupart des fruitiers peuvent être touchés. Pour tester l'efficacité de trois traitements différents, trois parcelles de pommiers ont été traitées. Le Tableau 1 présente les résultats des différents traitements.

Tableau 1. Résultats des traitements contre la moniliose des pommiers

	Eradication	Amélioration	Sans effet	Total
Traitement 1	55	25	10	90
Traitement 2	50	20	5	75
Traitement 3	65	30	10	105

II.1. Définir le test à appliquer et ses hypothèses nulle et alternative. Discuter ensuite la procédure et effectuer les calculs nécessaires.

II.2. Peut-on conclure au seuil d'erreur 5% que les trois traitements ont le même effet ?

III. Un laboratoire pharmaceutique veut savoir si l'efficacité d'un vaccin anti-grippe est indépendante de l'âge des patients. Il considère ainsi un groupe de 280 personnes vaccinées et réparties respectivement en deux échantillons de personnes de moins de 60 ans et de plus de 60 ans. Les résultats sont présentés dans le Tableau 2.

Tableau 2. Résultats de l'efficacité d'un vaccin anti-grippe selon l'âge des patients

Personnes âgées	Grippées	Non-grippées	Personnes vaccinées
Moins de 60 ans	28	72	100
Plus de 60 ans	72	108	180

III.1. Peut-on conclure que les différences d'âge n'influencent pas l'efficacité du vaccin anti-grippe, pour un seuil d'erreur de 5% ? *Procédure : présenter les hypothèses du test à considérer, calculer la statistique de décision et conclure.*

III.2. Le laboratoire souhaite au préalable s'assurer de l'efficacité du vaccin indépendamment de l'âge. En particulier, le vaccin est jugé inefficace par le laboratoire si la proportion des non grippées parmi les personnes vaccinées ne diffère pas significativement de celle des personnes non vaccinées. Le Tableau 3 présente les effectifs des personnes non grippées respectivement parmi les vaccinées et non vaccinées. Peut-on conclure que les deux proportions sont les mêmes au seuil d'erreur de 5% ? *Procédure : présenter les hypothèses du test à considérer, calculer la statistique de décision et conclure.*

Tableau 3. Résultats de l'efficacité d'un vaccin anti-grippe

	Non grippés	Taille de l'échantillon
Personnes vaccinées	180	280
Personnes non vaccinées	120	210
