Université de Strasbourg
Faculté de Sciences Economiques
et de Gestion
Année Universitaire 2012/2013

Licence 1ère année Economie Gestion
Mathématiques I

Examen – janvier 2013

Durée : 2 heures
CALCULATRICES INTERDITES - AUCUN DOCUMENT AUTORISE
Le barème est indicatif
Consignes: soigner la présentation de votre copie, respecter l'ordre des exercices, numéroter les feuilles, les exercices, être concis dans vos explications, encadrer les résulats finaux
Jusqu'à 2 points de pénalité pourront être soustraits en cas de non respect de ces consignes

Exercice 1 . — (3 points)

On considère la fonction f réelle à une variable réelle définie par :

$$f(x) = \frac{e^x}{x}$$

(1) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.

(2) Calculer la fonction dérivée $f'(x)$ de la fonction f .

(3) Etablir l'équation de la tangente au graphe de la fonction f au point d'abcisse $x = 2$.

Exercice 2 . — (6 points)

On considère la fonction réelle f à une variable réelle définie par :

$$f(x) = \ln\left(\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}\right).$$

(1) Montrer que l'ensemble de définition de la fonction f est $D_f = \mathbb{R}^{+*}$.

(2) Etudier la continuité de la fonction f sur D_f.

(3) On admet que la fonction f est dérivable sur D_f.

a) Calculer la fonction dérivée $f'(x)$ de la fonction f.
b) Déterminer le sens de variation de la fonction f sur D_f.
c) Montrer que la fonction f réalise une bijection de D_f sur un ensemble J que l'on précisera.
d) Etablir l'expression de la fonction réciproque $f^{-1}(x)$.
e) Sans calculs, conclure sur la continuité et le sens de variation de la fonction réciproque f^{-1} sur l'ensemble J.

Exercice 3 . — (3 points)

(1) Rappeler le théorème de l'Hospital.

(2) Utiliser ce théorème pour calculer la limite suivante:

$$\lim_{x \to +\infty} x \cdot \left(1 - \left(1 - 2 \cdot x^{-2}\right)^{\frac{1}{3}}\right)$$

Exercice 4 . — (4 points)

(1) Considérons une fonction réelle f à une variable réelle deux fois continuement différentiable sur son ensemble de définition D_f.

a) Rappeler la condition nécessaire de premier ordre pour un extrêmum intérieur de cette fonction.

b) Rappeler les conditions suffisantes de second ordre pour qu'un point intérieur de D_f satisfaisant la condition nécessaire de premier ordre soit:

b1) un maximum local de cette fonction.

b2) un minimum local de cette fonction .

(2) Le profit qu'une firme cherche à maximiser est égal à ses recettes moins son coût de production:

$\pi(Q) = R(Q) - C(Q)$ où $Q > 0$ désigne la quantité produite.

Supposons la fonction $\pi(Q)$ deux fois continuement différentiable sur $\mathbb{R}^{+*}$

a) Montrer qu'au niveau optimal de production Q^* , maximum local intérieur du profit de la firme, le coût marginal est égal à la recette marginale.

b) Considérons que l'entreprise est en situation de concurrence et qu'elle est donc "price taker".

Le prix de marché d'une unité du bien produit est $p = 2$.

Déterminer le niveau optimal de production Q^* pour la fonction de coût suivante:

$C(Q) = \frac{1}{3}Q^3 - 3Q^2 + 7Q + 10$

Exercice 5 . — (4 points)

(1) Rappeler le Théorème de Weierstrass-Valeurs extrêmes (cas des fonctions à une variable).

(2) Soit la fonction f réelle à une variable réelle définie par:

$f(x) = x^4 + x^3$

Utiliser le Théorème de Weierstrass-Valeurs extrêmes pour déterminer les minima et maxima globaux de cette fonction sur l'intervalle $I = \left[-1; -\frac{1}{2}\right]$.