

Université de Strasbourg
 Faculté des sciences économiques et de gestion
 2012-2013 — Semestre 1
 Licence 1 — LEG/LME

Contrôle terminal — Session de janvier 2013
 UE : Statistique
 Cours : Méthodes quantitatives descriptives
 Enseignant : L. Naegele

Durée : 2 heures
Aucun document autorisé
Seules les calculatrices non programmables sont autorisées

Toutes les réponses doivent être justifiées et lorsque des calculs sont nécessaires pour répondre, ils doivent apparaître sur la copie (sauf exercice 1).

La qualité de la rédaction des réponses et le soin apporté à la présentation pourront être pris en compte dans la notation.

Barème indicatif :

Exercice 1 : 3 points

Pour chaque question à choix multiples :

Si la (les) réponse(s) est (sont) exacte(s)	+ 0,5 point
Si au moins une réponse est fausse	- 1 point
En cas de non réponse	0 point

Exercice 2 : 8 points

Questions	1	2	3	4	5
Barème	1 point	2 points	2 points	2 points	1 point

Exercice 3 : 6 points

Questions	1	2	3	4	5
Barème	1 point	1 point	2 points	1 point	1 point

Exercice 4 : 3 points

Questions	1	2
Barème	2 points	1 point

Exercice 1 : questionnaire à choix multiples (3 points)

Indiquez la (ou les) bonne(s) réponse(s) sur votre copie. Aucune justification n'est demandée.

Rappel du barème :

- Si vous choisissez la (ou les) bonne(s) proposition(s), vous obtenez un demi-point (+ 0,5)
- Si vous ne répondez pas, vous n'obtenez aucun point (+ 0)
- Si vous faites une erreur ou plus, vous perdez un point (- 1). Si vous n'êtes pas sûr(e) de vous, il vaut mieux ne pas répondre. Si votre score final est négatif, il sera ramené à zéro.

1. Une grandeur qui augmente de 10 % par an est multipliée par deux en environ...

- a. ... sept ans
- b. ... dix ans
- c. ... cent ans
- d. ... cinq ans
- e. ... onze ans
- f. Aucune réponse correcte

Vu en cours (« la règle de 7 », chapitre 2).

On peut vérifier que $1,1^7 \approx 1,95$ soit environ 2.

Plus précisément, on peut montrer que le temps de doublement d'une grandeur qui augmente de 10% par an est d'environ 7 ans, 3 mois et 8 jours. En effet, si on note t le temps que la grandeur met à doubler (en années) : $1,1^t = 2 \Leftrightarrow t \cdot \ln(1,1) = \ln(2) \Leftrightarrow t = \frac{\ln(2)}{\ln(1,1)} \approx 7,27$.

2. Une grandeur augmente de 50 % en un mois puis diminue de 50 % le mois suivant. Au cours de ces deux mois, la grandeur...

- a. ... a baissé de 50 %
- b. ... est restée stable
- c. ... a augmenté de 25 %
- d. ... a baissé de 25 %
- e. ... a été multipliée par 0,5
- f. ... a été multipliée par 0,75
- g. ... a été multipliée par 1,25
- h. Aucune réponse correcte

Voir le cours, chapitre 2. Une augmentation de 50 % correspond à une multiplication par 1,5 et une diminution de 50 % à une multiplication par 0,5 (ou une division par 2). Si on cumule ces deux évolutions successives, on a une diminution de 25 % qui correspond à une multiplication par 0,75 :

$$1 + r = 1,5 * 0,5 = 0,75 \text{ donc } r = -0,25.$$

Tableau 1 : valeurs prises par la variable X

428	438	425	423	424	422	428
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

3. D'après le tableau 1, l'écart-type de X vaut environ...

- a. ... 25,26
- b. ... 426,86
- c. ... 0,01
- d. ... 5,03
- e. ... 18,47
- f. ... Aucune réponse correcte

On le vérifie par le calcul : $\sigma_X^2 = \overline{X^2} - \bar{X}^2 \approx 182232,29 - 182207,02 \approx 25,27$ donc $\sigma_X \approx 5,03$.

4. Si la variable X est exprimée en minutes, alors l'unité de l'écart-type de X est...

- a. ... la minute
- b. ... l'heure
- c. ... la minute au carré
- d. ... inconnue
- e. ... le pourcentage
- f. ... Aucune réponse correcte

L'écart-type mesure la dispersion des valeurs de la variable par rapport à la moyenne. L'unité de l'écart-type (et l'unité de la moyenne) est toujours la même que celle de la variable !

5. D'après le tableau 1, la valeur médiane de X est...

- a. ... 424
b. ... $(N+1)/2$
c. ... 4

d. ... 425

- e. ... 0,5 soit 50% des observations
f. ... Aucune réponse correcte

La variable X prend 7 valeurs ($N = 7$). La médiane est donc la valeur de rang $\frac{7+1}{2} = 4$ dans la série ordonnée, soit 425.

6. D'après le tableau 1, la valeur modale de X est...

- a. ... 426,86
b. ... 3
c. ... 14,28 %

d. ... 422

e. ... 425

f. ... Aucune réponse correcte

La valeur modale de X est la valeur la plus fréquente soit 428 (deux observations).

Exercice 2 : répartition et concentration (8 points)

Le Groupe d'experts intergouvernemental sur l'évolution du climat (GIEC) a fourni en 2007 les chiffres suivants sur les émissions de gaz à effet de serre (GES) dans le monde, mesurées en tonnes d'équivalent CO_2 (t éq. CO_2). Les données portent sur quatre groupes de pays établis en fonction du niveau des émissions de GES par habitant. Ces groupes de pays sont répartis en deux catégories :

- La catégorie « Annexe I » comprend les pays qui sont les plus développés. Ce sont ceux qui figurent à l'Annexe I de la Convention-cadre des Nations Unies sur les changements climatiques (CCNUCC) signée en 1992.
- Les autres pays sont regroupés dans la catégorie « Non Annexe I ».

Tableau 2 : émissions de gaz à effet de serre (GES) par groupes de pays

Catégories de pays de la CCNUCC et groupes de pays	Émissions de GES par habitant (en t éq. CO_2 par hab. et par an)	Émissions totales de GES (en milliards de t éq. CO_2 par an)	Population (en milliards)
Annexe I : USA, Canada, Japon, Australie, N.-Zélande	22,0	11,0	0,5
Annexe I : Ex-URSS, Europe	11,5	9,2	0,8
Non Annexe I : Amérique Latine, Asie de l'est, Moyen Orient, autres pays	6,6	14,4	2,2
Non Annexe I : Afrique, Asie du sud	3,3	9,4	2,8
Ensemble	<u>7,0</u>	44,0	6,3

Source : d'après GIEC, 1^{er} groupe de travail, 2007

1. Calculez la proportion des émissions mondiales de GES provenant des pays de l'Annexe I et la proportion de la population mondiale que représentent les pays de l'Annexe I.

Les pays de l'Annexe I émettent 45,9 % des GES dans le monde et représentent 20,6 % de la population mondiale.

$$\text{Calculs : } \frac{11,0+9,2}{44,0} \approx 0,459 \text{ et } \frac{0,5+0,8}{6,3} \approx 0,206$$

- Donnez la signification du chiffre **souligné**. Expliquez comment il peut être calculé à partir des données du tableau.

Dans le monde, les émissions de GES sont en moyenne de 7 tonnes d'équivalent CO₂ par habitant et par année. Deux façons de retrouver ce chiffre à partir du tableau 1 (aux arrondis près) :

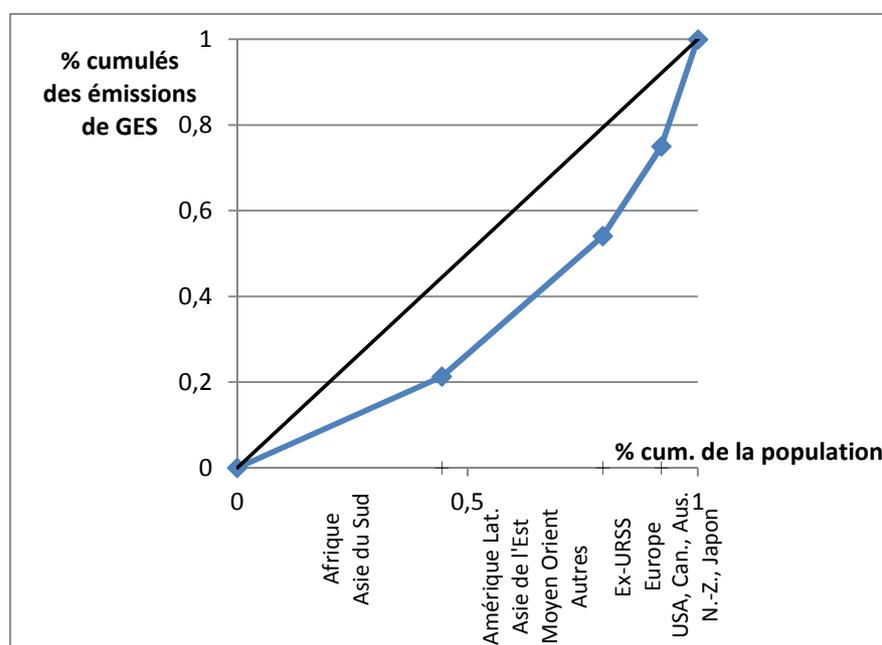
- Diviser la somme des valeurs par le nombre d'individus : $\frac{44}{6,3} \approx 6,98$
- Calculer une moyenne des émissions de CO₂ par habitant dans chaque groupe de pays pondérée par la population de chaque groupe : $\frac{22,0*0,5+11,5*0,8+6,6*2,2+3,3*2,8}{6,3} \approx 6,98$

- Construisez la courbe de concentration des émissions mondiales de GES (courbe de Lorenz).

Il faut penser à classer les groupes de pays en fonction des **émissions de GES par habitant** (notre variable X), de ceux qui émettent le moins à ceux qui émettent le plus. Tableau des calculs et graphique :

Groupes de pays	GES/hab. (t CO ₂)	Population (milliards)	Total GES (Mt CO ₂)	% population	% GES	% cumulés population	% cumulés GES
	x_i	n_i	$n_i x_i$	f_i	$f(n_i x_i)$ ou q_i	F_i	$F(n_i x_i)$ ou Q_i
Afrique et Asie du Sud	3,3	2,8	9,4	44,4	21,4	44,4	21,4
Am. Lat., Asie E, My. O., autres	6,6	2,2	14,4	34,9	32,7	79,3	54,1
Ex-URSS et Europe	11,5	0,8	9,2	12,7	20,9	92	75
USA, Can., Aus., N.-Z., Japon	22	0,5	11	7,9	25	~ 100	100
Total	—	6,3	44	100	100	—	—

Graphique : Courbe de concentration des émissions mondiales de GES



4. Calculez l'indice de Gini en utilisant la méthode de votre choix.

Méthode directe. On sait que : $I_G = 1 - \sum f_i * (Q_{i-1} + Q_i)$. A partir du tableau des calculs de la réponse précédente, on trouve $\sum f_i * (Q_{i-1} + Q_i) = 0,444 * (0 + 0,214) + 0,349 * (0,541 + 0,214) + \dots + 0,079 * (0,75 + 1) \approx 0,66$ et donc $I_G \approx 0,34$.

Méthode par le calcul des aires. On sait que : $I_G = 1 - 2 * \mathcal{A}$ avec \mathcal{A} la somme des aires des trapèzes sous la courbe de concentration. On calcule l'aire de chaque trapèze à l'aide de la formule vue en cours : demi-somme des hauteurs multipliée par la base. Par exemple l'aire du premier trapèze est $\mathcal{A}_1 = \frac{0+0,214}{2} * 0,444 \approx 0,0475$, celle du second trapèze est $\mathcal{A}_2 = \frac{0,214+0,541}{2} * 0,349 \approx 0,1317$, etc. La somme des aires est $\mathcal{A} \approx 0,33$ et donc $I_G \approx 0,34$.

5. Si la croissance des émissions de GES est relativement plus faible dans les pays de l'Annexe I par rapport aux autres, comment évolue l'indice de Gini ? Expliquez.

Si les émissions de GES par habitant augmentent plus vite dans les pays hors Annexe I, alors le poids des émissions de GES de ces pays par rapport aux émissions totales de GES augmente plus rapidement que le poids de la population de ces pays par rapport à la population totale. Alors la concentration des émissions de GES par habitants diminue : la courbe de concentration se rapproche de la bissectrice et l'indice de Gini diminue.

Rappel : Plus celui-ci est proche de 0 plus la distribution se rapproche d'une situation théorique, représentée graphiquement par la bissectrice, où la concentration des émissions de GES par habitant est nulle, c'est-à-dire où les habitants de chaque groupe de pays rejettent la même quantité de GES en moyenne.

Remarque : on peut répondre qu'on ne peut pas savoir, en effet la question ne précise pas « émissions de GES *par habitants* ». Si les émissions totales de GES des pays hors Annexe I augmentent plus vite que les émissions totales des pays Annexe I, on ne peut en tirer aucune conclusion sur l'évolution de l'indice de Gini que nous avons calculé. Par exemple si au cours d'une période la croissance des émissions de GES est deux fois plus rapide dans les pays hors Annexe I par rapport aux pays de l'Annexe I mais que le nombre d'habitants dans les pays hors Annexe I augmente quatre fois plus vite que dans les autres, alors l'indice de Gini augmentera.

Exercice 3 : évolution, taux de variation, indices (6 points)

Monsieur Durand place une partie de son épargne en Bourse. Le tableau ci-dessous donne l'évolution du portefeuille d'actions de M. Durand, c'est-à-dire l'ensemble des actions qu'il possède, de 2005 à 2010. On rappelle que le cours d'une action désigne son prix.

Tableau 3 : le portefeuille d'actions de M. Durand

	Cours au 31/12/2005 (en euros)	Quantité détenue au 31/12/2005	Cours au 31/12/2010 (en euros)	Quantité détenue au 31/12/2010
Société Géniale	92,17	35	49,10	20
Booguyes	41,70	27	32,37	25
Christion Diarrhe	75,10	10	106,80	25

1. Quelle est la valeur du portefeuille d'actions de M. Durand en 2005 et en 2010 ?

En 2005 le portefeuille de M. Durand vaut 5102,85 euros. En 2010 la valeur de son portefeuille est 4461,25 euros. Calcul de la valeur du portefeuille d'actions i à l'instant t : $V_t = \sum p_t^i q_t^i$. Ici $t = 2005$ ou 2010 et $i =$ Société Géniale, Booguyes et Christion Diarrhe. Par exemple $V_{2005} = 92,17 * 35 + 41,70 * 27 + 75,10 * 10 = 5102,85$.

2. Calculez les mesures de variation suivantes et interprétez vos résultats :

- l'indice de la valeur du portefeuille en 2010, base 100 en 2005 ;

$$I(V)_{2010/2005=100} = \frac{4461,25}{5102,85} * 100 \approx 87,4$$

L'indice de la valeur du portefeuille de M. Durand en 2010 est 87,4 base 100 en 2005.

- le taux de variation de la valeur du portefeuille d'actions entre 2005 et 2010 ;

$$r_{2010/2005} = \frac{4461,25}{5102,85} - 1 \approx -0,126$$

La valeur du portefeuille de M. Durand en 2010 a diminué de 12,6 % par rapport à 2005. (On peut déduire ce taux de variation directement à partir de l'indice.)

- le taux de variation annuel moyen de la valeur du portefeuille de M. Durand au cours de la période étudiée.

$$\bar{r}_{2010/2005} = \sqrt[5]{\frac{4461,25}{5102,85}} - 1 \approx -0,027$$

Entre 2005 et 2010 la valeur du portefeuille de M. Durand a diminué de 2,7% chaque année en moyenne.

3. Si le taux d'inflation a été en moyenne de 1,5 % par an durant la période étudiée, quel est l'indice de la valeur du portefeuille en 2010 en euros constants de 2005, base 100 en 2005 ?

Pour calculer un indice d'évolution en euros constants (c'est-à-dire l'indice d'évolution de la valeur réelle du portefeuille) il faut diviser l'indice d'évolution en valeur par l'indice des prix :

$$i(\text{valeur réelle}) = \frac{i(V)}{i(P)}$$

Ici, en 2010 les prix ont été multipliés par environ 1,077 par rapport à 2005 : $1,015^5 \approx 1,077$.

Donc l'indice de la valeur du portefeuille de M. Durand en 2010 base 100 en 2005, en euros constants de 2005, est environ 81,2.

$$\frac{87,4}{1,077} \approx 81,2$$

Explication complémentaire : La valeur du portefeuille a diminué de 12,6 % entre 2005 et 2010 en euros courants, mais la diminution de sa valeur réelle s'élève à 18,8 % sur cette période. Elle s'explique par la diminution du cours des actions mais aussi par la hausse du prix des biens et services. En effet, si M. Durand vend ses actions fin 2010, il obtient une somme d'argent qui ne lui permet d'acheter que 81,2 % de ce qu'il aurait pu acheter en 2005 après avoir vendu ses actions.

4. Montrez que l'indice d'évolution des cours des actions du portefeuille de M. Durand en 2010 calculé en utilisant la méthode de Laspeyres est environ 71,73 (base 100 en 2005).

On sait que l'indice de Laspeyres des prix est $\mathcal{L}(P)_{2010/2005} = \frac{\sum p_{2010}^i q_{2005}^i}{\sum p_{2005}^i q_{2005}^i}$ avec $i =$ Société Géniale, Booguyes et Christion Diarrhe. On vérifie, à partir du tableau 1, que l'indice des cours des actions du portefeuille mesuré par la méthode de Laspeyres est bien égal à 71,73, base 100 en 2005.

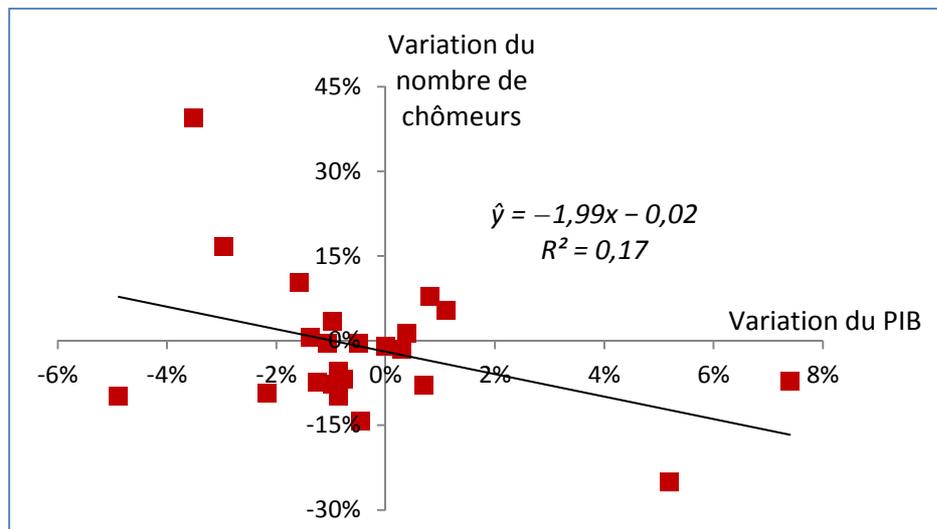
$$\mathcal{L}(P)_{2010/2005} = \frac{49,1 * 35 + 32,37 * 27 + 106,8 * 10}{5102,85} \approx 0,7173$$

5. Comparez la variation de la valeur du portefeuille et la variation des cours des actions du portefeuille durant la période étudiée. Comment expliquer cet écart ?

La valeur du portefeuille a baissé de 12,6 % en six ans mais la diminution des cours des actions du portefeuille est plus rapide puisqu'elle s'élève à environ 28 % si on la mesure par un indice de Laspeyres. Si M. Durand limite les pertes c'est parce qu'entre 2005 et 2010 il a modifié la structure de son portefeuille d'actions. En effet la part, dans le portefeuille, des actions dont le cours est en baisse sur la période (Société Géniale, Booguyes) a diminué tandis que s'est accrue la part des actions Christion Diarrhe, dont le cours est en hausse.

Exercice 4 : moindres carré ordinaires (3 points)

Graphique 1 : Évolution du PIB et du nombre de chômeurs de 2010 à 2011 dans quelques pays du monde (en % par rapport à 2010)



Source : d'après OCDE

1. Interprétez les valeurs des coefficients de l'équation de régression.

D'après l'équation estimée, une hausse de 1% du PIB entre 2010 et 2011 se traduit par une réduction du nombre de chômeurs de 2 % environ. Si le PIB est stable le nombre de chômeurs l'est aussi puisque la valeur du coefficient b_0 est à peu près nulle.

2. Interprétez la valeur du coefficient de détermination.

R^2 est proche de zéro, les résultats sont peu significatifs : le lien statistique entre les deux variables est faible. Les prédictions du modèle estimé sont décevantes pour les valeurs extrêmes surtout.