Université de Strasbourg
Faculté de Sciences Economiques et de Gestion
Année Universitaire 2012/2013

Licence 1ère année Economie Gestion
Mathématiques II

Examen – Mai 2013

Durée : 2 heures
CALCULATRICES INTERDITES - AUCUN DOCUMENT AUTORISE.
Le barème est indicatif.
Consignes:
- *soigner la présentation de votre copie,*
- *respecter l'ordre des exercices,*
- *numéroter les feuilles et les exercices,*
- *être concis dans vos explications,*
- *encadrer les résulats finaux.*

Jusqu'à 2 points de pénalité pourront être soustraits en cas de non respect de ces consignes.

Exercice 1 . — (3,5 points)

Soient deux éléments de $\mathbb{R}^3$: $M = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(1) Calculer $2M \cdot (M - 3N)$.

(2) Quelle est la nature de l'angle formé par les vecteurs M et N ?

(3) Soit le point $Q = (x, 1, y)$, trouver x et y de sorte que ce point Q appartienne au segment de droite d'extrémités les points M et N.

(4) Calculer la distance euclidienne entre les points M et N.

(5) Donner les coordonnées d'un vecteur orthogonal au vecteur M.

(6) Trouver l'équation du plan P passant par le point $A = (1, 1, 1)$ et de vecteur normal N.

(7) A quel type de plan (horizontal, vertical, oblique), ce plan P correspond-il?

Exercice 2 . — (2,5 points)

(1) Donner, dans le cas des fonctions réelles à plusieurs variables réelles, la définition d'une fonction homogène de degré k.

(2) Rappeler le théorème d'Euler.

(3) Soient K , le nombre d'unités de capital, L , le nombre d'unités de travail et Y , le nombre d'unités de bien Y. Considérons la fonction de production du bien Y suivante: $Y = Y(K, L) = \beta \cdot K^{\alpha} \cdot L^{1-\alpha}$.

a) Montrer que cette fonction Y de production du bien Y est homogène de degré k à préciser.

b) Qu'implique le Théorème d'Euler du point de vue de la rémunération des facteurs de production pour cette fonction de production Y ? Montrer le par application du Théorème d'Euler à cette fonction de production Y.

Exercice 3 . — (3 points)

Soient les fonctions réelles à deux variables réelles définies par:

$$u = f(x_1, x_2) = (3x_1 + x_2)^{\frac{1}{3}} \qquad v = g(x_1, x_2) = 3x_1^{\frac{2}{3}} x_2^{-\frac{1}{3}}$$

(1) Déterminer l'ensemble de définition

a) de la fonction f.
b) de la fonction g.

(2) Les fonctions f et g sont-elles homogènes? si oui, de quel degré?

(3) Calculer les élasticités de la fonction g et donner leur signification.

(4) Soit une fonction réelle w à deux variables réelles, homogène de degré r et une fonction réelle h à deux variables réelles définies par:

$$h(x_1, x_2) = w(u, v)$$

avec $u = f(x_1, x_2) = (3x_1 + x_2)^{\frac{1}{3}}$ et $v = g(x_1, x_2) = 3x_1^{\frac{2}{3}} x_2^{-\frac{1}{3}}$, les fonctions précédentes.

La fonction h est-elle homogène? si oui, de quel degré?

Exercice 4 . — (6 points)

Soit la fonction définie par: $f(x_1, x_2) = \sqrt{4 - \left((x_1 - 1)^2 + (x_2 + 1)^2\right)}$

(1) Déterminer et représenter graphiquement l'ensemble de définition de la fonction f.

(2) Donner l'expression générale des courbes de niveau de la fonction f. A quoi correspondent-elles graphiquement?

(3) Trouver la valeur ou les valeurs du nombre réel a tel que la courbe de niveau $q = 0$ passe par le point $A = (a, a)$.

(4) Calculer le gradient de la fonction f .

(5) Evaluer le gradient de la fonction f au point $B = (2, 0)$.

(6) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de niveau passant par le point $B = (2, 0)$ qui serait tangente à cette courbe en ce même point $B = (2, 0)$.

(7) Vérifier que le vecteur gradient de la fonction f en $B = (2, 0)$ est orthogonal à cette tangente.

(8) En $B = (2, 0)$, dans quelle proportion doit-on augmenter les valeurs des variables x_1 et x_2 pour obtenir un accroissement maximal de la fonction f ?

Exercice 5 . — (5 points)

Considérons la fonction réelle f à deux variables réelles définie par :
$f(x_1, x_2) = x_1 x_2^2 + x_1^3 x_2 - x_1 x_2$

(1) Calculer le Gradient et la matrice Hessienne de cette fonction f.

(2) Déterminer les points candidats à être extrema de cette fonction f.

(3) Déterminer la nature (maximum local, minimum local, point selle) des points candidats à être extrema trouvés précedemment.