Université de Strasbourg
Faculté de Sciences Economiques
et de Gestion
Année Universitaire 2012/2013

Licence 1ère année Economie Gestion
Mathématiques II

Examen – JUIN 2013
Semestre 2, Session 2

Durée : 2 heures
CALCULATRICES INTERDITES - AUCUN DOCUMENT AUTORISE.
Le barème est indicatif.
Consignes: soigner la présentation de votre copie, respecter l'ordre des exercices, numéroter les feuilles et les exercices, être concis dans vos explications, encadrer les résulats finaux.
Jusqu'à 2 points de pénalité pourront être soustraits en cas de non respect de ces consignes.

Exercice 1 . — (5 points)

Soient deux éléments de $\mathbb{R}^3$: $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

(1) Calculer $5 \cdot (A - B) \cdot (A + B)$.

(2) Quelle est la nature de l'angle formé par les vecteurs A et B?

(3) Soit le point $C = (x, y, 1)$, trouver x et y de sorte que ce point C appartienne au segment de droite d'extrémités A et B.

(4) Calculer la distance euclidienne entre les points A et B.

(5) Trouver l'équation du plan P passant par le point $D = (1, 2, 0)$ et de vecteur normal A.

Exercice 2 . — (5 points)

Soit la fonction réelle à deux variables réelles définie par:
$y = f(X) = f(x_1, x_2) = 2x_1 x_2^{\frac{1}{3}} - x_2^2 x_1^{-\frac{2}{3}}$

(1) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.

(2) Montrer que la fonction f est homogène de degré k à préciser.

(3) Calculer les dérivées partielles premières de f.

(4) Calculer les élasticités de la fonction f.

(5) Evaluer au point $(1, 1)$ les élasticités de f et donner leur signification.

Exercice 3 . — (3 points)

Considérons une fonction f à deux variables définie par:

$y = f(X) = f(x_1, x_2)$

(1) A quoi correspond toute courbe de niveau q représentative de cette fonction f dans le plan $\mathbb{R}^2$ d'axes ox_1, ox_2.

(2) Donner un exemple graphique du passage de la représentation graphique dans l'espace $\mathbb{R}^3$ d'une fonction f à deux variables à sa représentation graphique dans le plan $\mathbb{R}^2$.

Exercice 4 . — (7 points)

Soit la fonction réelle f à deux variables réelles définie par:

$y = f(X) = f(x_1, x_2) = \dfrac{x_1}{1 + x_1^2 + x_2^2}$

(1) Déterminer l'ensemble de définition de cette fonction f.

(2) Donner l'expression générale des courbes de niveau de la fonction f.

(3) Vérifier que la courbe C de niveau $q = \dfrac{1}{3}$ passe par le point $A = (1, 1)$.

(4) Montrer qu'au voisinage de ce point $A = (1, 1)$, on peut écrire l'équation de la courbe C

sous la forme $x_2 = g(x_1)$ qu'on explicitera.

(5) Calculer les dérivées partielles premières de la fonction f.

(6) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe C en le point $A = (1, 1)$.

(7) Vérifier que le vecteur gradient de la fonction f en $A = (1, 1)$ est orthogonal à cette tangente.

(8) Calculer la matrice Hessienne de la fonction f.

(9) Rappeler les conditions nécessaires de premier ordre en termes de dérivées pour un extrêmum intérieur d'une fonction réelle à deux variables réelles.

(10) Déterminer les points candidats à être extrema de la fonction f.

(11) Rappeler les conditions suffisantes en termes de dérivées pour un maximum local intérieur d'une fonction réelle à deux variables réelles.

(12) Rappeler les conditions suffisantes en termes de dérivées pour un minimum local intérieur d'une fonction réelle à deux variables réelles.

(13) Déterminer la nature (maximum, minimum, point selle) des points candidats à être extrema trouvés précédemment à la question (10).