L1S2 Math-Eco
Algèbre S2

13 Mai 2013

Examen final
Enseignant responsable : M. Atlagh
Durée totale : 2 heures

Les calculatrices, téléphones portables, baladeurs et documents sont interdits.

Premier exercice (4 pts)

On considère dans $\mathbb{R}^4$ les vecteurs lignes $e_1 = (1,0,1,0)$, $e_2 = (-1,1,1,1)$, $e_3 = (2,3,4,0)$ ainsi que $f_1 = (-1,2,-3,1)$, $f_2 = (-1,2,1,3)$, $f_3 = (-1,2,5,-1)$. On pose $E = Vect(e_1, e_2, e_3)$ et $F = Vect(f_1, f_2, f_3)$.
1. Calculer $dim(E)$ et $dim(F)$.
2. Trouver des équations et une base de $E \cap F$.
3. Extraire une base de $\mathbb{R}^4$ de la famille $\{e_1, e_2, e_3, f_1, f_2, f_3\}$.

Deuxième exercice (6 pts)

Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et f un endomorphisme de E tel que $f \neq 0$ mais $f^2 = 0$.
1. Montrer que $Im(f)$ est inclus dans $Ker(f)$ et en déduire le rang de f.
2. Soit e_3 un vecteur de E tel que $f(e_3) \neq 0$. On pose $e_2 = f(e_3)$, montrer qu'on peut choisir un vecteur e_1 dans Ker(f) tel que $\{e_1, e_2\}$ constitue une famille libre.
3. En déduire que $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ est une base de E et écrire la matrice de f dans cette base.
4. (Exemple) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -6 & 3 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Vérifier que $A^2 = 0$, choisir les vecteurs e_1, e_2 et e_3 comme ci-dessus et écrire la matrice de passage de la base canonique vers la base $B = \{e_1, e_2, e_3\}$.

Troisième exercice (4 pts)

Soit u un endomorphisme de E espace vectoriel de dimension n, tel que $u^2 = id$. (id étant l'identité de E).
1. Soit $x \in E$, montrer que le vecteur $x_1 := u(x) + x$ (resp. $x_2 := x - u(x)$) vérifie $u(x_1) = x_1$ (resp. $u(x_2) = -x_2$).
2. Montrer que $E = Ker(u - id) \oplus Ker(u + id)$.

3. On prend $n = 3$. De ce qui précède, déduire l'existence d'un entier $k \in [0, 3]$ et d'une base de E dans laquelle la matrice de u s'écrit :

$$A = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & -I_{3-k} \end{pmatrix}$$

où I_s est la matrice identité d'ordre s.

Quatrième exercice (8 pts)

On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}$$

Soient $e'_1 = 2e_1 + 3e_2 + e_3$, $e'_2 = 3e_1 + 4e_2 + e_3$ et $e'_3 = e_1 + 2e_2 + 2e_3$.

1. Montrer que (e'_1, e'_2, e'_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Calculer $f(e'_1)$, $f(e'_2)$ et$f(e'_3)$ et en déduire B la matrice de f dans la base (e'_1, e'_2, e'_3).
3. Ecrire la matrice de passage (que l'on notera P) de la base (e_1, e_2, e_3) à la base (e'_1, e'_2, e'_3) ; calculer P^{-1}.
4. Ecrire la formule générale reliant A, B et P et faire la vérification détaillée de la formule obtenue.
5. Calculer B^4 et A^4.