FSEG STRASBOURG
Faculté des sciences économiques et de gestion

UNIVERSITÉ DE STRASBOURG

Année Universitaire 2012/2013
Licence Economie – Gestion, L2-S3

UE Probabilités et Statistique

Examen : Probabilités et Statistique II – Session 2 – Juin 2013

Durée de l'épreuve : **2h00.** Enseignant : M. EL OUARDIGHI

Documents autorisés : le formulaire de probabilités et tables statistiques.

Les calculatrices autorisées sont celles retenues par le conseil de la Faculté.

Barème indicatif : **I.** 2+2+2=6 points. **II.** 2+2=4 points. **III.** 2+2=4 points. **IV.** 2+2+2= 6 points

Temps moyen indicatif : **I.** 40mn. **II.** 15mn. **III.** 22mn. **IV.** 35mn

---

Sujet

I. Considérons un couple de variables aléatoires discrètes (X,Y) dont la loi de probabilité est indiquée dans le tableau suivant :

X \ Y	1	2	3
1	0.2	0.1	0.2
2	0	0.1	0.1
3	0.3	0	0

I.1. Déterminer les lois marginales de X et de Y, et indiquer si ces variables aléatoires sont indépendantes.

I.2. Donner la formule de la covariance entre X et Y. Calculer cette covariance et conclure.

I.3. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire $E(Y/X)$ et calculer son espérance, i.e. $E[E(Y/X)]$. Comparer le résultat obtenu avec $E(Y)$.

II. Soient X et Y deux variables aléatoires suivant chacune une loi de Poisson de paramètres $\lambda_1 = 14$ et $\lambda_2 = 19$ respectivement. Nous supposons que les deux variables aléatoires sont indépendantes.

II.1. Soit la variable aléatoire $Z = X + Y$. Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire Z ? En approchant convenablement la loi de Z, calculer la probabilité $P(Z \geq 38)$.

II.2. Quelle est la probabilité $P(Z = 33)$?

III. Soit X une variable aléatoire de densité :

$$g_X(x;\theta) = \begin{cases} \theta x^{\theta} & x \in]0;1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases},$$

où θ est un paramètre réel inconnu, strictement positif que l'on se propose d'estimer à l'aide d'un échantillon $(X_1,\ldots,X_n)$ de variables aléatoires indépendantes de même loi que X.

III.1. Construire à l'aide de cet échantillon l'estimateur de θ obtenu par la méthode des moments.

III.2. Calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance de θ.

IV. Le nombre d'accidents domestiques dans les familles de deux enfants ou plus peut être considérée comme une variable aléatoire X suivant une loi de Poisson de paramètre λ. On cherche à estimer le paramètre λ à partir d'un échantillon $(X_1,\ldots,X_n)$ de cette loi. En particulier, l'analyse d'un échantillon de 239 familles assurées montre que la moyenne $\bar{x} = 1.891$ et la variance $s^2 = 1.896$.

IV.1. Donner l'estimateur de λ obtenu par la méthode des moments. Quelles sont les propriétés de cet estimateur ? En particulier, montrer qu'il est sans biais et convergent.

IV.2. Écrire la vraisemblance de l'échantillon, notée $L(x_1,\ldots,x_n;\lambda)$ et déduire la fonction log-vraisemblance. Calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance du paramètre λ.

IV.3. Peut-on conclure que l'estimateur du maximum de vraisemblance de λ est efficace ?