Université de Strasbourg
Probabilité et Statistique III L2-S4 2012/13
Durée de l'épreuve : 1h

Faculté des Sciences Économiques et de Gestion
Chargé de TD : X. Chen

Contrôle Continu de Probabilité et Statistique III

Exercice 1

Une étude de l'Université montre que la note des étudiants suit sensiblement une loi normale de moyenne μ et d'écart-type $\sigma = 4$. On veut étudier le performance d'un groupe de 50 étudiants. On constate que la moyenne de l'échantillon est $\bar{x} = 11.5$.

1. On cherche à savoir si la moyenne des notes est supérieure à 10 :
$$\begin{cases} H_0 : & \mu = \mu_0 = 10 \\ H_1 : & \mu = \mu_1 > 10 \end{cases}$$
   (a) Soit $\bar{X}_n$ la variable décision, sous H_0, $\bar{X}_n \sim N(\mu,\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$. Discutez la règle de décision.
   (b) Quelle serait l'hypothèse H_1 si on voulait mener un test bilatéral ?
   (c) Représentez graphiquement la région critique du test unilatéral et du test bilatéral pour un risque d'erreur de α.
2. Menez le test unilatéral décrit en 1., avec $\alpha = 5\%$
3. Donnez *l'expression* la puissance du test précédent si en réalité l'espérance μ est égale à 10.5225. Que signifie la puissance du test ?
4. Construisez l'intervalle de confiance pour la moyenne au seuil de $\alpha = 5\%$. Comment peut-on conclure à partir de cette intervalle sur le test décrit en 1 ?

Exercice 2

Soit Y_i qui suit une loi normale avec μ et σ *inconnus*. On observe dans un échantillon aléatoire simple de taille $n = 17$, la moyenne$\bar{Y} = 20.5$ et la variance empirique $S'^2 = 6.25$. On cherche à savoir si l'écart-type dans la population est (strictement) supérieur à 2.

1. Quelle est l'hypothèse H_0 à tester ? l'hypothèse H_1 ?
2. Donnez la statistique de décision. Sous l'hypothèse H_0, donnez la loi de la statistique. Justifiez vos réponses.
3. Menez le test pour un risque d'erreur de $\alpha = 5\%$.
4. Quelle est *l'expression* de la puissance du test précédent ?

Indication :

- Soit $Z \sim N(0,\ 1)$, $Pr(Z \leq z_c) = c$. Les quantiles d'ordre c de la loi normale centrée réduit sont :
$$z_{0.95} = 1.645,\ z_{0.975} = 1.960,\ z_{0.995} = 2.576.$$
- Soit $T \sim T(d)$, $Pr(T_d \leq t_{(d,c)}) = c$. Les quantiles d'ordre c de la loi Student à d degrés de liberté sont :
$$t_{(16,0.95)} = 1.746,\ t_{(17,0.95)} = 1.740,\ t_{(18,0.95)} = 1.734.$$
- Soit $X \sim \chi^2(d)$, $Pr(X_d \leq x_{(d,c)}) = c$. Les quantiles d'ordre c de la loi Chi-2 à d degrés de liberté sont :
$$x_{(16,0.95)} = 26.30,\ x_{(17,0.95)} = 27.59,\ x_{(18,0.95)} = 28.87.$$