

SUJET
SESSION DE MAI

Durée : 2 heures
Documents autorisés : néant
Calculatrice non programmable autorisée

Exercice 1: (6 pts)

On considère le système suivant avec m est un paramètre réel et x, y, z des inconnues réelles.

$$\text{Soit le système suivant : } \begin{cases} (1+m)x + y + z = 0 \\ x + (1+m)y + z = 0 \\ x + y + (1+m)z = m \end{cases}$$

1. Ecrire le système sous forme matricielle du type $AX = B$.
2. Peut-on dire sans calcul si ce système est de Cramer ?
3. Calculer le déterminant de A en fonction de m .
4. Pour quelle(s) valeur(s) de m le système est-il de Cramer ? En déduire la solution dans ce(s) cas.
5. Déterminer les solutions lorsque le système n'est pas de Cramer.

Exercice 2 : (4 pts)

$$\text{Soit } a \in \mathbb{R} \text{ et la matrice } A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le déterminant de la matrice A . Pour quelle(s) valeur(s) de a la matrice A est-elle inversible ?
2. Lorsque A est inversible, déterminer A^{-1} par la méthode de la comatrice.

Exercice 3 : (8 pts)

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

1. Calculer le polynôme caractéristique de A .
2. En déduire les valeurs propres de la matrice A .
3. Déterminer les sous-espaces propres de A .
4. Donner la matrice diagonale D associée à A .
5. Déterminer la matrice de passage P et calculer son inverse P^{-1} .
6. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ préciser D^n . Donner le lien entre A^n et D^n .
7. Calculer A^{100} .

Exercice 4 : (3 pts)

1. Résoudre l'équation différentielle suivante :
 $y'' + 2y' + y = e^x$ lorsque $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.