

**UE Probabilités et Statistique**

**Examen : Probabilités et Statistique III - Session 2 - Juin 2013**

*Durée de l'épreuve : 2h00.*

Enseignant : M. EL OUARDIGHI

*Documents autorisés : le formulaire de probabilités et tables statistiques (7 pages).*

*Les calculatrices autorisées sont celles retenues par le conseil de la Faculté.*

*Barème indicatif : I. 1+1+2+2=6 points. II. 2+2+2=6 points. III. 2+2=4 points. IV. 2+2=4 points.*

*Temps moyen indicatif : I. 30mn. II. 35mn. III. 20 à 25mn. IV. 20mn.*

**Sujet**

**I.** Une machine est réglée pour remplir des sachets d'un produit alimentaire d'un poids moyen de 15 grammes. Considérons un échantillon de taille  $n$  à partir duquel on souhaite tester l'hypothèse nulle  $H_0 : \mu = \mu_0 = 15$  contre l'hypothèse alternative  $H_1 : \mu = \mu_1 > 15$ . On suppose que la variable aléatoire « poids des sachets » est normale, de moyenne  $\mu$  et d'écart-type  $\sigma = 2$ .

- I.1.** Préciser la région d'acceptation du test et exprimer le seuil critique, noté  $k_2$ , en fonction de la taille de l'échantillon  $n$  et du quantile  $z_{1-\alpha}$  où  $\alpha$  est le risque de première espèce.
- I.2.** Donner l'expression du seuil critique  $k_2$  en fonction de la taille de l'échantillon  $n$  et du quantile  $z_\beta$  où  $\beta$  est le risque de 2<sup>ème</sup> espèce.
- I.3.** Pour  $n = 16$  et  $k_2 = 16$ , calculer les risques  $\alpha$  et  $\beta$ .
- I.4.** Calculer le seuil critique  $k_2$  pour  $n = 16$  et  $\alpha = 5\%$ . Déduire la valeur de  $\beta$ . Commenter.

**II.** Un agriculteur souhaite tester l'efficacité d'un engrais plus écologique. Le Tableau 1 ci-dessous présente la quantité récoltée en kilogramme d'une certaine céréale avant et après l'application de l'engrais en question sur un échantillon composé de six parcelles. Peut-on conclure que le nouveau engrais augmente la productivité pour un risque  $\alpha = 5\%$  ? En particulier, il convient de tester l'hypothèse nulle  $H_0 : \mu_{\text{après}} = \mu_{\text{avant}}$  contre l'hypothèse alternative  $H_1 : \mu_{\text{après}} > \mu_{\text{avant}}$ . Démarche à suivre :

- II.1.** Préciser la variable de décision, son espérance et sa variance.
- II.2.** Calculer la moyenne et la variance de la variable de décision.
- II.3.** Définir l'intervalle d'acceptation unilatéral à droite et conclure.

**Tableau 1.** Poids en kilogramme avant et après l'application de l'engrais

Avant	6	9	8	11	10	14
Après	9	11	10	11	14	12

**III.** La construction d'un nouvel aéroport provoque une division de l'opinion parmi les habitants des agglomérations voisines. Les uns sont favorables en raison des retombées économiques, les autres s'y opposent pour cause de nuisance. Les autorités locales pensent qu'il est cependant raisonnable de construire l'aéroport si 70% des avis sont favorables. Un sondage auprès de la population concernée a été réalisé et sur la base d'un échantillon de 220 individus, 66% des habitants sont favorables à la construction de l'aéroport.

**III.1.** Présenter les hypothèses du test et montrer qu'il n'y a pas lieu d'annuler la construction de l'aéroport.

**III.2.** Certains opposants refusent le résultat du test, prétendant que la taille de l'échantillon est faible. A votre avis, quelle devrait être la taille de l'échantillon à considérer si l'on adopte la règle qui consiste à refuser la construction de l'aéroport si les avis favorables n'atteignent pas 67% ?

**IV.** En général, durant le premier mois qui suit le lancement sur le marché d'un nouveau produit de consommation, on peut s'attendre à ce que chaque point de vente déclarera approximativement la même quantité vendue. Les ventes effectives de 180 unités livrées à six points de vente le premier mois sont présentées dans le Tableau 2. Peut-on conclure que notre prévision s'est avérée correcte au seuil d'erreur 5% ? En particulier :

**IV.1.** Quel type de test non paramétrique peut-on effectuer ? Énoncer avec précision les hypothèses nulle et alternative du test.

**IV.2.** Effectuer les calculs nécessaires et conclure.

**Tableau 2.** Les ventes effectives de six points de vente

Point de vente n°	1	2	3	4	5	6
Quantité vendue	32	22	41	34	25	26