

Examen – janvier 2014

Durée : 2 heures

CALCULATRICES INTERDITES - AUCUN DOCUMENT AUTORISE

Le barème est indicatif

*Consignes: soigner la présentation de votre copie, respecter l'ordre des exercices,
numéroter les feuilles, les exercices, être concis dans vos explications,
encadrer les résultats finaux*

Jusqu'à 2 points de pénalité pourront être soustraits en cas de non respect de ces consignes

Exercice 1 . — (4 points)

- (1) Rappeler la formule de capitalisation permettant de calculer le capital acquis C_t suite à placement d'un montant C_0 à taux d'intérêt composé périodique sur une durée de t périodes.
- (2) En quoi la suite de capital acquis C_t correspond-elle à une progression géométrique?
- (3) Quel taux d'intérêt annuel, composé annuellement est équivalent au taux d'intérêt semestriel de 3%, composé semestriellement?
On notera que deux taux d'intérêt sont équivalents s'ils permettent d'obtenir suite au placement d'un même montant sur une même durée, le même montant d'intérêt.

Exercice 2 . — (6 points)

On considère la fonction réelle f à une variable réelle définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+x-2}{x-2} \\ 2 \text{ si } x = 2 \end{cases}.$$

- (1) Déterminer l'ensemble de définition D_f de la fonction f .
- (2) Calculer les limites suivantes:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} f(x) \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} f(x)$$

- (3) Etudier la continuité de la fonction f sur D_f .

(4) On pose $I = [5; 10]$ et on admet que la fonction f est dérivable sur cet intervalle I .

- a) Calculer la fonction dérivée $f'(x)$ de la fonction f .
- b) Déterminer le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle I .
- c) Déterminer $J = f(I)$
- d) Montrer que la fonction f réalise une bijection de l'intervalle I sur l'intervalle J .
- e) Etablir l'expression de la fonction réciproque $f^{-1}(x)$. (On remarquera que $f(6) = 10$)
- f) Sans faire de calcul supplémentaire, conclure sur la continuité et le sens de variation de la fonction réciproque f^{-1} sur l'ensemble J .

Exercice 3 . — (3 points)

- (1) Rappeler le théorème de l'Hospital.
- (2) Utiliser ce théorème pour calculer la limite suivante:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

Exercice 4 . — (2 points)

Calculer le taux de croissance du pouvoir d'achat d'un individu ayant connu une croissance de son salaire de 0,5% alors que le niveau des prix augmentait de 3%. (Tous les taux de croissance donnés et demandés sont supposés être des taux de croissance instantanés)

Exercice 5 . — (5 points)

- (1) Rappeler le Théorème de Weierstrass-Valeurs extrêmes (cas des fonctions à une variable).
- (2) Soit la fonction f réelle à une variable réelle définie par:

$$f(x) = \ln(4x - x^2)$$

Utiliser le Théorème de Weierstrass-Valeurs extrêmes pour déterminer les minima et maxima globaux de cette fonction sur l'intervalle $I = [1; 3]$.