UNIVERSITÉ DE STRASBOURG

FACULTÉ des SCIENCES ÉCONOMIQUES et de GESTION

Université de Strasbourg.

2013/2014.

Math. Éco. L1 S1.

ALGÈBRE

Cadre réservé au correcteur

Note définitive	Appréciation et signature du correcteur :

Contrôle Terminal

(Mer. 8 Jan. 2014)

Resp. A. Al-Amrani.

N.B. Aucun document, aucun moyen de communication, ne sont autorisés.

Le candidat remplira très soigneusement l'en-tête ci-contre et s'abstiendra, sous peine d'annulation, de faire figurer sur sa composition tout signe qui permettrait d'en indiquer la provenance. En apposant, ci-contre, sa signature, il reconnaît qu'il a été prévenu des suites que pourraient avoir pour lui, d'après les lois et les règlements, les fausses signatures portées sur les actes ainsi que toute autre fraude ou tentative de fraude.

N'oubliez pas de numéroter vos copies

Questions de cours.

1) Quels sont les polynômes réels irréductibles ?

2) " " complexes " ?

3) Le polynôme réel X^4+X^2+1, est-il irréductible ? Si la réponse est négative, quelle est sa factorisation ?

EXERCICE 1.

Par la méthode de GAUSS, résoudre le système linéaire réel $A.X = B$ où :

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3\\ 1 & 4 & 0\\ 2 & 6 & -1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2\\ -1\\ 5\end{pmatrix}\quad \left(X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}\right).$$

Est-ce que A est inversible ? (On ne demande pas de calculer A^{-1}).

EXERCICE 2.

On considère la matrice réelle, dépendant d'un paramètre m :

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 2m \end{pmatrix}$$

i) Calculer $\det(M)$; est-ce que M est inversible ?

ii) Soit $N = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ fixés, quelconques.

Résoudre par la méthode de GAUSS le système linéaire $M.X = N$.

iii) Déduire de ce qui précède l'inverse de M quand $m = 1$.

EXERCICE 3.

(E) désigne l'équation $231x - 357y = c$ (sur $\mathbb{Z}$) (où $c \in \mathbb{Z}$ est constant).

À quelle condition (E) possède des solutions ?

Cette condition étant satisfaite, résoudre (E).

(Préciser toutes les étapes de la résolution.)

EXERCICE 4.

On se place dans $\mathbb{R}[X]$ (anneau des polynômes réels). Soient $S = X^6 - 1$ et $P = X^4 + 2X^3 + 2X^2 - 2X - 3$.

0) Faire la division euclidienne de S par P.

1) Trouver deux racines évidentes de S et de P.
Factoriser S et P en polynômes irréductibles.

2) Quel est le pgdc de S et P ?

3) Montrer qu'un polynôme Q peut s'écrire $Q = US + VP$ si, et seulement si, $Q(-1) = Q(1) = 0$.