Université de Strasbourg
L1S2 Math-Eco

Année 2013/2014
Algèbre Linéaire

Session 2 - Controle Terminal

Responsables : C.Hulck et R.Ponchon

Durée : 2h00

Les calculatrices, téléphones portables, baladeurs et documents sont interdits.

Exercice 1

On se place dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ et on note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ sa base canonique.

1. On considère la partie F de $\mathbb{R}^4$ définie par

$$F = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ x - y + 2z + t = 0 \text{ et } x - 3y - 8z - t = 0\right\}.$$

   (a) Montrer que F est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

   (b) Déterminer une base de F. En déduire la dimension de F.

   (c) Compléter cette base de F en une base de $\mathbb{R}^4$.

2. Soient

$$v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix}5\\2\\-1\\8\end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix}2\\1\\0\\3\end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix}3\\2\\1\\4\end{pmatrix}.$$

   (a) Donner la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v_1, v_2, v_3, v_4)$ des vecteurs v_1, v_2, v_3, v_4 dans la base $\mathcal{B}$ puis l'échelonner.

   (b) Quel est le rang de la famille $\mathcal{G} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$?

   On pose G le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs v_1, v_2, v_3, v_4 :

$$G = \mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3, v_4).$$

   (c) En déduire de la question précédente une base et la dimension de G.

   (d) Décrire G par un système d'équation(s) d'équation(s) indépendante(s) à déterminer.

3. Déterminer une base de $F \cap G$.

4. A-t-on $F + G = \mathbb{R}^4$? A-t-on $F \oplus G = \mathbb{R}^4$?

Exercice 2

Soit $\mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à deux muni de la base canonique $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$. On considère l'application :

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ & P & \longmapsto & P + (1 - X)P' \end{array}$$

1. Vérifier que l'image d'un élément de $\mathbb{R}_2[X]$ par f reste bien dans $\mathbb{R}_2[X]$.

2. Montrer que f est un endomorphisme.

3. Déterminer une base de $\ker(f)$. Quelle est la dimension de $\ker(f)$?

4. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$. Quelle est la dimension de $\mathrm{Im}(f)$?

5. L'application f est-elle injective? surjective ?

6. Montrer que $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}_2[X]$.

7. Écrire la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ de f dans la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_2[X]$, en expliquant la démarche suivie.

Exercice 3

On se place dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^4$, noté E.
On note $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et f l'unique endomorphisme de E tel que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(f) = A$, où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. Déterminer l'expression de $f(x, y, z, t)$.
2. Déterminer une base de $\ker(f)$ et de $\mathrm{Im}(f)$.
3. Exprimer $f(e_1 + e_2 - e_3 - e_4)$ dans la base $\mathcal{E}$. Que remarque-t-on?
4. Soient $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Calculer AX et AY en fonction de X et Y.
5. On note $\mathcal{F} = (e_2 + e_3,\ e_1 + e_2 - e_3 - e_4,\ e_1 + e_4,\ e_1 - e_2 + e_3 - e_4)$.
Montrer que $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
6. Déduire des questions précédentes $\mathrm{Mat}_{\mathcal{F}}(f)$.
7. En déduire l'existence d'une matrice $P \in GL_4(\mathbb{R})$ que l'on précisera telle que $A = PBP^{-1}$, où B est une matrice diagonale. On ne demande pas d'expliciter la matrice P^{-1}
8. Exprimer, pour tout entier naturel $p \geq 1$, les matrices B^{2p} et B^{2p-1} en fonction de B et B^2.
9. Démontrer à l'aide d'une récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = PB^nP^{-1}$.
10. En déduire, pour tout entier naturel $n \geq 1$, une expression simple de A^n en fonction de A et A^2.
On pourra distinguer le cas n pair ou n impair.