UE Probabilités et Statistique

Examen : Probabilités et Statistique III – Session 1 - Janvier 2014

Durée de l'épreuve : **2h00.** Enseignant : M. EL OUARDIGHI

Documents autorisés : le formulaire de probabilités et tables statistiques.

Les calculatrices autorisées sont celles retenues par le conseil de la Faculté.

Barème indicatif : **I.** 2+2=4 points. **II.** 2+2+2=6 points. **III.** 2+2+2=6 points. **IV.** 2+2= 4 points.

Temps moyen indicatif : **I.** 25mn. **II.** 30mn. **III.** 30mn. **IV.** 25mn.

Sujet

I. On prélève avec remise à partir d'une population un échantillon de n observations. La variable aléatoire X associée au tirage est supposée normale de moyenne μ et d'écart-type σ. Soit un échantillon $(X_1,...,X_5)$ de variables aléatoires indépendantes et de même loi que X. Considérons les estimateurs suivants de μ :

$$\hat{\mu}_1 = \frac{1}{5}(X_1 + ... + X_5) \ ; \quad \hat{\mu}_2 = X_1 + \frac{1}{2}X_2 + \frac{1}{3}X_3 + \frac{1}{4}X_4 + \frac{1}{5}X_5 \ ; \quad \hat{\mu}_3 = X_1 \ ;$$

$$\hat{\mu}_4 = \frac{1}{3}(X_1 + X_2 + X_3) + \frac{1}{2}(X_4 + X_5) \ ; \quad \hat{\mu}_5 = \frac{1}{10}(2X_1 + 3X_2) + \frac{1}{8}(X_3 + 2X_4 + X_5).$$

I.1. Quels sont, parmi ces cinq estimateurs, ceux qui sont sans biais ?

I.2. Comparer les efficacités relatives des estimateurs retenus dans **I.1.** Quel est, selon vous, le meilleur estimateur sans biais ?

II. Dans le répertoire des véhicules automobiles immatriculés auprès d'une Préfecture, le prélèvement au hasard d'un échantillon de 500 véhicules montre que 370 sont d'une marque étrangère. Soit X la variable aléatoire égale au '*nombre de véhicules de marque étrangère*' dans l'échantillon.

II.1. Quel est l'estimateur ponctuel du maximum de vraisemblance $\hat{p}_{MV}$ de la proportion p des véhicules de marque étrangère ? En particulier, écrire les fonctions vraisemblance et log-vraisemblance de l'échantillon. Calculer ensuite l'estimateur $\hat{p}_{MV}$.

II.2. Montrer que l'estimateur $\hat{p}_{MV}$ est sans biais et convergeant.

II.3. L'estimateur $\hat{p}_{MV}$ est-il efficace ?

III. Le taux d'intérêt moyen sur les prêts à 5 ans consentis par les banques pour l'achat d'une voiture neuve peut être considéré comme une variable aléatoire X suivant une loi normale de moyenne μ et d'écart-type $\sigma = 2.5\%$. Pour estimer le taux d'intérêt moyen, un organisme a analysé les comptes de 54 banques prises au hasard et constate un taux moyen de l'ordre de 9.75%.

III.1. Donner l'estimateur $\hat{\mu}_{MM}$ de μ obtenu par la méthode des moments. Calculer son espérance $E(\hat{\mu}_{MM})$ et sa variance $V(\hat{\mu}_{MM})$. Que peut-on conclure ?

III.2. Déterminer un intervalle de confiance à 95% pour le taux d'intérêt moyen.

III.3. Déterminer la taille minimum de l'échantillon qu'il faudrait considérer pour connaître ce taux avec une erreur inférieure ou égale à 0.265, au niveau de confiance 95%.

IV. Madame MM., candidate à des élections dans une circonscription d'environ 13000 électeurs, commande à un institut de sondages une étude sur les intentions de vote des électeurs. Dans l'hypothèse où Monsieur MR. serait le seul candidat s'opposant à elle, le sondage, réalisé sur un échantillon de 990 électeurs, donne les résultats suivants :

Intentions de vote pour Madame MM. : 420
Intentions de vote pour Monsieur MR. : 411
Sans opinion : 159

Soit X la variable aléatoire égale aux '*intentions de vote pour Madame MM.*' dans l'échantillon.

IV.1. Donner la loi de X. Calculer son espérance et sa variance. Par quelle loi discrète peut-on approximer la loi de X ? Justifier votre réponse. Discuter pourquoi une nouvelle approximation par une autre loi discrète ne peut être justifiée dans ce cas particulier.

IV.2. Préciser les paramètres de l'approximation de la loi de X par une loi normale. Cette approximation vous paraît-elle justifiée ? Utiliser l'approximation pour calculer $P[X = 425]$.
