FSEG STRASBOURG
Faculté des sciences économiques et de gestion

UNIVERSITÉ DE STRASBOURG

Année Universitaire 2013/2014
Licence Economie – Gestion, L2-S3

UE Probabilités et Statistique
Examen : Probabilités et Statistique III – Session 2 - Juin 2014

Durée de l'épreuve : **1h30.** Enseignant : M. EL OUARDIGHI
Documents autorisés : le formulaire de probabilités et tables statistiques.
Les calculatrices autorisées sont celles retenues par le conseil de la Faculté.
Barème indicatif : **I.** 2+1=3 points. **II.** 2+2=4 points. **III.** 1.5+1.5=3 points. **IV.** 2+2+4+2= 10 points.
Temps moyen indicatif : **I.** 15mn. **II.** 20mn. **III.** 15mn. **IV.** 35mn.

Sujet

I. Une pièce de monnaie truquée montre 'pile' avec la probabilité de 6%. On lance la pièce 105 fois. **(a)** Quelle est la probabilité d'obtenir 2 fois pile ? *Indication : utiliser certains résultats généraux sur la convergence pour donner une approximation à cette probabilité.* **(b)** Quelle est l'erreur commise (en %) par rapport à un calcul exact à partir de la loi initiale ?

II. Considérons la variable aléatoire X 'production individuelle des exploitations agricoles' d'un bien alimentaire, d'écart-type connu $\sigma = 890kg$. Supposons que dans une région, la production de 35 exploitations, choisies au hasard et indépendamment, donne une moyenne observée de $3950kg$. **(a)** Donner un intervalle de confiance de niveau 95% pour la production moyenne. **(b)** Quel est le nombre d'observations nécessaire, avec un niveau de confiance de 95%, pour que l'erreur maximum soit inférieure ou égale à $150kg$?

III. On prélève avec remise à partir d'une population un échantillon de n observations. La variable aléatoire X associée au tirage est supposée suivre un processus de Poisson de paramètre λ. Soit un échantillon $(X_1,\ldots,X_3)$ de variables aléatoires indépendantes et de même loi que X. Considérons les estimateurs suivants de λ :

$$\hat{\lambda}_1 = \frac{1}{5}(X_1 + \ldots + X_3)\ ;\quad \hat{\lambda}_2 = X_3\ ;\quad \hat{\lambda}_3 = \frac{1}{2}(X_1 + X_3) + X_2\ .$$

(a) Déterminer, parmi ces trois estimateurs, ceux qui sont sans biais. **(b)** Discuter l'efficacité relative des estimateurs et conclure (préciser le meilleur estimateur sans biais).

IV. Le nombre d'accidents mortels par mois, sur une rocade dangereuse, est une variable aléatoire X qui suit une loi de Poisson de paramètre λ.

IV.1. Quel est l'estimateur naturel de λ ? (*Démarche : construire à l'aide de l'échantillon $X_1,\ldots,X_n$ l'estimateur de λ obtenu par la méthode des moments*)

IV.2. Etudier les propriétés de l'estimation de λ obtenue en **IV.1.** (*Démarche : préciser en particulier si l'estimateur obtenu est sans biais et convergent*)

IV.3. **(a)** Écrire la fonction vraisemblance $L(x_1,\ldots,x_n;\lambda)$ et déduire la fonction log-vraisemblance. **(b)** Calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance de λ.

IV.4. Etudier l'efficacité de l'estimateur du maximum de vraisemblance de λ. (*Démarche : déduire la quantité d'information de Fisher, etc. conclure*)
