FSEG de Strasbourg
L2

Mathématiques4
2013/2014

SUJET

SESSION DE MAI

Durée : 2 heures
Documents autorisés : néant
Calculatrice non programmable autorisée

Exercice 1: (6 pts)

On considère les vecteurs $U = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $W = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

1.a) La famille $\{U, V, W\}$est-elle libre ?
1.b) La famille $\{U, V\}$est-elle libre ? (Réponse à justifier)
2. Soit F le sous espace vectoriel engendré par $\{U, V, W\}$. Donner une base de F ainsi que sa dimension.
3. Soit $G = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / x + 2y + z = 0 \right\}$.
a) Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
b) Déterminer une base de G.
c) A-t-on $F = G$?

Exercice 2 : (6 pts)

On note $B_0 = (e_1, e_2, e_3) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

f est une application de $\mathbb{R}^3$vers $\mathbb{R}^3$ défini par :

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$.

1. Calculer le polynôme caractéristique de f sous forme factorisée.
2. En déduire les valeurs propres de f et les sous-espaces vectoriels associés.

3. L'application f est-elle diagonalisable ?
4. On pose :

$$B' = (e_1', e_2', e_3') = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

a) Montrer que B' est une base de $\mathbb{R}^3$.
b) Déterminer la matice de A dans la base B'.

Exercice 3 : (5 pts)

Résoudre, à l'aide de la méthode de Cramer, le système selon les valeurs de a :

$$\begin{cases} (a+1)x + (a-1)y = & 1 \\ (a-1)x + (a+1)y = & 1 \end{cases}$$

Exercice 4 : (3 pts)

1. Résoudre l'équation différentielle suivante :
$y'' - 2y' + y = \frac{x^2}{2} - x - 1$ lorsque $y(0) = 0$ et $y(1) = e + \frac{3}{2}$.