Maths 4

Corrigé CT mai 2014.

Ex. 1 :

1.a) La famille $\{U, V, W\}$ est liée car :

$\forall$ α, β, γ 3 réels t.q : $\alpha U + \beta V + \gamma W = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \gamma = 0 \\ -\alpha - \beta - 2\gamma = 0 \\ \alpha + 2\beta + 3\gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -\gamma \\ \beta = -\gamma \\ \gamma \text{ est quelconque} \end{cases}$$

Les coeff α, β et γ ne sont pas necessairem^t^ nuls, dc famille liée.

b) U et V sont non nuls et non proportionnels, dc $\{U, V\}$ libre.

2). Comme $\{U, V, W\}$ est liée et $\{U, V\}$ libre
$\Rightarrow$ $\{U, V\}$ est une base de F et dc $\dim(F) = 2$.

3). $G = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / x + 2y + z = 0 \Leftrightarrow x = -2y - z \right\}$.

$\Rightarrow$ $G = \left\{ \begin{pmatrix} -2y - z \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ avec } y \text{ et } z \in \mathbb{R} \right\}$. soit

$$G = \left\{ y \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ avec } y \text{ et } z \in \mathbb{R} \right\}.$$

G est un ss-e.v engendré par $u_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

b) $\{u_1, u_2\}$ est génératrice de G. u_1 et u_2 non nuls, non proportionnels, ils sont linéairement indpdts $\Rightarrow \{u_1, u_2\}$ est une base de G.

c) $F = G$ car $\{u_1, u_2\}$ base de $G \Rightarrow \dim(G) = 2 = \dim(F)$.

Montrons que $G \subset F$ pour montrer que $F = G$.

$u_1 = v - 2u$ et $u_2 = v - u \Rightarrow u_1 \in F$ et $u_2 \in F$, On peut déduire que tout vecteur combinaison linéaire de u_1 et u_2 appartient à F, ce qui justifie que tout vecteur de $G \in F \Rightarrow G \subset F$.

<u>Cl</u> : $F = G$.

<u>Ex. 2</u> :

1) $P(\lambda) = -(\lambda - 1)^2 (\lambda - 2)$

2) $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 2$

E_1 : $(A - I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = z \\ z \text{ quelconque} \end{cases} \Rightarrow E_1 = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} z \\ 0 \\ z \end{pmatrix}\right\}$

$E_1 = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

$E_2 : \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow E_2 = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

3) $\dim(E_1) + \dim(E_2) = 1 + \cancel{1} = 2 < 3 = \dim(F)$
donc f n'est pas diagonalisable.

4.a) B' famille libre $\Rightarrow \forall (d_1, d_2, d_3) \in \mathbb{R}^3$,
t.q : $d_1 e'_1 + d_2 e'_2 + d_3 e'_3 = \vec{0}$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} d_1 + d_2 = 0 \\ d_1 + d_3 = 0 \\ d_2 + d_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \{ d_1 = d_2 = d_3 = 0$

Dc B' est libre, or $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ donc c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

b) $f(e'_1) = 2e'_1$

$f(e'_2) = e'_2$

$e'_3 = e_2 + e_3 \Rightarrow f(e'_3) = f(e_2) + f(e_1) = \left(e_1 + \frac{3}{2} e_2 + \frac{1}{2} e_3\right) + \left(-\frac{1}{2} e_2 + \frac{3}{2} e_3\right) = e_1 + e_2 + 2e_3 = e'_2 + e'_3$

D'où $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2e'_1 & e'_2 & e'_2 + e'_3 \end{array}$

Ex. 3 :

$$\begin{vmatrix} a+1 & a-1 \\ a-1 & a+1 \end{vmatrix} = (a+1)^2 - (a-1)^2 = 4a$$

Si $a \neq 0 \Rightarrow$ solut° unique (x, y) :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a-1 \\ 1 & a+1 \end{vmatrix}}{4a} = \frac{1}{2a} \quad \text{et} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a+1 & 1 \\ a-1 & 1 \end{vmatrix}}{4a} = \frac{1}{2a}.$$

Si $a = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - y = 1 \\ -x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 1 \\ x - y = -1 \end{cases}$

$\Rightarrow$ impossible $\Rightarrow$ pas de solution.

Ex. 4 :

Equat° caractéristique : $r^2 - 2r + 1 = 0$

a) $\Rightarrow r = 1 \Rightarrow y(x) = e^x(Ax + B),\ A, B \in \mathbb{R}$.

$y_s(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow y_s' = 2ax + b \quad y_s'' = 2a$

$\Rightarrow (2a - 2b + c) + (b - 4a)x + ax^2 = \frac{1}{2}x^2 - x - 1$

$\Rightarrow \begin{cases} a = 1/2 \\ b = 1 \\ c = 0 \end{cases} \Rightarrow y_s(x) = \frac{1}{2}x^2 + x$

$\Rightarrow y = \frac{1}{2}x^2 + x + e^x(Ax + B)$

Avec $y(0) = 0$ et $y(1) = e + \frac{3}{2}$

$\Rightarrow B = 0$ et $A = 1$

$\Rightarrow \boxed{y(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + xe^x}$.