FSEG STRASBOURG
Faculté des sciences économiques et de gestion

UNIVERSITÉ DE STRASBOURG

Année universitaire 2014/2015

LICENCE 1ère année Economie – Gestion

Semestre 1 – Session 1 / Examens / Janvier 2015

Mathématiques I (B. Godbillon)

Durée : 2 heures

Tous documents interdits

Calculatrice interdite

Sujet :

Exercice 1 : (4 points)

Etablir la formule finale permettant de calculer le montant qu'il aurait fallu gagner à la Loterie Nationale le 1er janvier 2015 afin d'être en mesure par la suite de se verser une rente de 10 000 euros chaque 31 Décembre de Décembre 2015 à Décembre 2024 sachant que du 1er janvier 2015 au 31 Décembre 2024, le gain de cette loterie peut être placé à un taux d'intérêt annuel composé de 4,5%.

Les différentes étapes d'établissement de cette formule finale doivent être clairement explicitées. Il s'agit de faire un calcul de valeur actuelle.

Exercice 2 : (4 points)

On considère la fonction réelle à une variable réelle suivante :

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 1$$

1) **Déterminer l'ensemble de définition de cette fonction.**
2) **Déterminer les intervalles de croissance et de décroissance de cette fonction.**
3) **Déterminer les intervalles de concavité et de convexité de cette fonction.**

Exercice 3 : (4 points)

1) **Rappeler le théorème de l'Hospital.**
2) **Utiliser ce théorème pour calculer la limite suivante :**

$$\lim_{x \to +\infty} \left(x^2 + 3x\right)^{1/x}$$

Exercice 4 : (4 points)

1) Rappeler le Théorème de Weierstrass-Valeurs extrêmes (cas des fonctions à 1 variable)
2) Soit la fonction réelle à une variable réelle suivante: $f(x) = x^2 \cdot (x + 2x^2)$

   Utiliser le théorème de Weierstrass-Valeurs extrêmes pour déterminer les minima et maxima globaux de cette fonction sur l'intervalle $I = [-3\,;3]$

Exercice 5 : (4 points)

Considérons une entreprise en situation de monopole et donc « price maker ». Le profit de cette entreprise est égal à ses recettes moins son coût de production et on a :

$$\pi(Q) = R(Q) - C(Q) = p(Q) \cdot Q - C(Q)$$

avec $\pi(Q)$, fonction de profit,

$p(Q)$, fonction « inverse » de demande supposée décroissante

$R(Q) = p(Q) \cdot Q$, fonction de recettes

$C(Q)$, fonction de coût

Q, quantité de bien produit.

Supposons que $\pi(Q)$ est une fonction continue et de dérivée continue sur $]0\,;+\infty[$

1) Montrer qu'en le niveau optimal de production $Q^* > 0$ permettant à l'entreprise de maximiser son profit sur $]0\,;+\infty[$, le coût marginal est inférieur au prix qui permet d'écouler cette quantité Q^*.
2) Supposons que la fonction de coût de l'entreprise est la fonction suivante :

   $$C(Q) = 2 \cdot Q^2 + 10 \cdot Q + 200$$

   et que la fonction de demande à laquelle l'entreprise est confrontée est :

   $$Q = Q(p) = 400 - 4 \cdot p$$

   a) Déterminer le niveau de production Q^* qui permet à l'entreprise de maximiser son profit.
   b) Déterminer le prix auquel ce profit maximum est obtenu.