

Année universitaire 2014/2015

LICENCE 1ère année Economie – Gestion et Double-Licence Mathématiques – Economie

Semestre 2 – Session 1 / Contrôle terminal / Mai 2015

Statistique et Probabilités II (G. Attanasi et M. Lefebvre)

Durée : 2h00

Tous documents interdits

Calculatrice autorisée

Question 1 (4 points)

On constitue un groupe de 6 personnes choisies parmi 25 femmes et 32 hommes.

De combien de façons peut-on constituer ce groupe de 6 personnes :

- Si on n'impose aucune contrainte sur la composition du groupe ?
- Si on veut uniquement des hommes ?
- Si on veut uniquement des personnes de même sexe ?
- Si on veut au moins une femme et un homme ?

Question 2 (4 points)

Soit X et Y , deux variables aléatoires tels que X peut prendre les valeurs $-2, 0, 1$ et Y peut prendre les valeurs $-1, 1, 2$.

La loi jointe est donnée par le tableau suivant :

Y	-1	1	2
X			
-2	0,2	0,2	a
0	0,1	0,1	0,05
1	0,2	0	0,1

- Donner l'unique valeur possible pour **a**, en justifiant brièvement la réponse.
- Calculer les lois marginales de X et Y , et calculer l'espérance mathématique et la variance de X .
- Montrer que X et Y ne sont pas indépendants.
- Déterminer l'espérance mathématique et la variance de la variable aléatoire $Z = 2X + 10$.

Question 3 (4 points)

Un pépiniériste vend des bulbes de fleurs. On conviendra qu'un bulbe germe s'il donne naissance à une plante qui fleurit.

On considère que le pépiniériste dispose d'un très grand nombre de bulbes et que la probabilité qu'un bulbe germe est de 0,35.

Il prélève au hasard successivement 15 bulbes de ce stock.

On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de bulbes qui germent.

- a) Quelle est la loi de X ?
- b) Quelle est la probabilité qu'exactement 5 bulbes choisis germent ?
- c) Quelle est la probabilité qu'au moins 4 bulbes germent ?
- d) En moyenne, sur un prélèvement de 15 bulbes, combien vont germer ?

Question 4 (4 points)

Les primes de fin d'année accordées aux employés d'une grande entreprise sont uniformément réparties de 500 € à 1500 €.

On note X la variable aléatoire donnant la prime d'un employé choisi au hasard.

- a) Déterminer la loi de X . Représenter graphiquement sa densité.
- b) Quelle est la prime moyenne perçue par les employés ? Avec quel écart-type ?
- c) Quelle est la probabilité qu'un employé reçoive plus de 1200 € de prime ?
- d) Quelle est la probabilité qu'un employé reçoive entre 750 € et 1000 € de prime ?

Question 5 (4 points)

A l'issue du Contrôle terminal de Statistique et Probabilités, les étudiants ont obtenus une moyenne de 14,11 (sur 20) assorti d'un écart-type de 6,7. Les notes se répartissent selon une loi normale.

- a) Quelle est la probabilité qu'un étudiant obtienne une note inférieure à 10 ?
- b) Quelle est la probabilité qu'un étudiant obtienne une note supérieure à 17 ?
- c) Au dessus de quelle note se situe 35% des étudiants ?
- d) Quelle note maximale a obtenu la moitié des étudiants ?

Récapitulatif des lois continues

Nom	Notation	Support	Loi/Densité	Espérance	Variance
Uniforme	$\mathcal{U}(a, b)$	$X(\Omega) = [a, b]$	$f_X(x) = \frac{1}{b-a}$ si $x \in [a, b]$	$E(X) = \frac{a+b}{2}$	$\text{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$
Exponentielle	$\mathcal{E}(\lambda)$	$X(\Omega) = [0, +\infty[$	$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ si $x \geq 0$	$E(X) = \frac{1}{\lambda}$	$\text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$
Normale	$\mathcal{N}(\mu, \sigma)$	$X(\Omega) = \mathbb{R}$	$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	$E(X) = \mu$	$\text{Var}(X) = \sigma^2$
Normale standard (Z)	$\mathcal{N}(0, 1)$	$Z(\Omega) = \mathbb{R}$	$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}$	$E(Z) = 0$	$\text{Var}(Z) = 1$
Carré d'un $\mathcal{N}(0, 1)$ (K^2)	$\chi^2(n)$	$K^2(\Omega) = [0, +\infty[$	$K^2 = \sum_{i=1}^n Z_i^2$ où $Z_i \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$ ind.	$E(K^2) = n$	$\text{Var}(K^2) = 2n$
Student (T)	$\mathcal{S}(n)$	$T(\Omega) = \mathbb{R}$	$T = \frac{Z}{\sqrt{K^2/n}}$ où $\begin{cases} Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1) \\ K^2 \hookrightarrow \chi^2(n) \end{cases}$	$E(T) = 0$	$\text{Var}(T) = \frac{n}{n-2}$
Fisher (F)	$F(n_1, n_2)$	$F(\Omega) = [0, +\infty[$	$F = \frac{K_1^2/n_1}{K_2^2/n_2}$ où $\begin{cases} K_1^2 \hookrightarrow \chi^2(n_1) \\ K_2^2 \hookrightarrow \chi^2(n_2) \end{cases}$	$E(F) = \frac{n_2}{n_2-2}$	$\text{Var}(F) = \frac{2n_1^2(n_1+n_2-2)}{n_1(n_2-2)^2(n_2-4)}$

$$a, b \in \mathbb{R} \quad a < b \quad \lambda > 0 \quad \mu \in \mathbb{R} \quad \sigma > 0 \quad n, n_1, n_2 \in \mathbb{N}^*$$

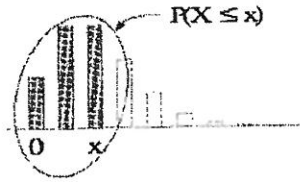
Fonction de répartition de la loi de normale $\mathcal{N}(0, 1)$

$$\text{Exemple: } P(\mathcal{N}(0, 1) \leq 1,33) = 0,9082.$$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998

Table de la variable aléatoire de Poisson

Fournit la probabilité $P(X \leq x)$
pour $X \sim \text{Po}(\lambda)$



λ	0,05	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00
x											
0	0,9512	0,9048	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488	0,4966	0,4493	0,4066	0,3679
1	0,9988	0,9953	0,9825	0,9631	0,9384	0,9098	0,8781	0,8442	0,8088	0,7725	0,7358
2	1,0000	0,9998	0,9989	0,9964	0,9921	0,9856	0,9769	0,9659	0,9526	0,9371	0,9197
3		1,0000	0,9999	0,9997	0,9992	0,9982	0,9966	0,9942	0,9909	0,9865	0,9810
4			1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9996	0,9992	0,9986	0,9977	0,9963
5					1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9997	0,9994
6								1,0000	1,0000	1,0000	0,9999
7											1,0000

λ	1,20	1,40	1,60	1,80	2	3	4	5	6	8	10
x											
0	0,3012	0,2466	0,2019	0,1653	0,1353	0,0498	0,0183	0,0068	0,0025	0,0003	0,0000
1	0,6626	0,5918	0,5249	0,4628	0,4060	0,1992	0,0916	0,0404	0,0174	0,0030	0,0005
2	0,8795	0,8335	0,7834	0,7306	0,6767	0,4232	0,2381	0,1247	0,0620	0,0138	0,0028
3	0,9662	0,9463	0,9212	0,8913	0,8571	0,6472	0,4335	0,2650	0,1512	0,0424	0,0103
4	0,9923	0,9857	0,9763	0,9636	0,9473	0,8153	0,6288	0,4405	0,2851	0,0996	0,0293
5	0,9985	0,9968	0,9940	0,9896	0,9834	0,9161	0,7851	0,6160	0,4457	0,1912	0,0671
6	0,9997	0,9994	0,9987	0,9974	0,9955	0,9665	0,8893	0,7622	0,6063	0,3134	0,1301
7	1,0000	0,9999	0,9997	0,9994	0,9989	0,9881	0,9489	0,8666	0,7440	0,4530	0,2202
8	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9962	0,9786	0,9319	0,8472	0,5925	0,3328
9				1,0000	1,0000	0,9989	0,9919	0,9682	0,9161	0,7166	0,4579
10						0,9997	0,9972	0,9863	0,9574	0,8159	0,5830
11						0,9999	0,9991	0,9945	0,9799	0,8881	0,6968
12						1,0000	0,9997	0,9980	0,9912	0,9362	0,7916
13							0,9999	0,9993	0,9964	0,9658	0,8645
14							1,0000	0,9998	0,9986	0,9827	0,9165
15								0,9999	0,9995	0,9918	0,9513
16								1,0000	0,9998	0,9963	0,9730
17									0,9999	0,9984	0,9857
18									1,0000	0,9993	0,9928
19										0,9997	0,9965
20										0,9999	0,9984
21										1,0000	0,9993
22											0,9997
23											0,9999
24											1,0000