FSEG STRASBOURG
Faculté des sciences économiques et de gestion

UNIVERSITÉ DE STRASBOURG

Année Universitaire 2014/2015
Licence Economie – Gestion, L2-S3

**UE Techniques quantitatives**
**Examen : Probabilités et statistique III – Session 1** - Janvier 2015

*Durée de l'épreuve* : **2h00.** Enseignant : M. EL OUARDIGHI
*Documents autorisés* : Formulaire lois usuelles (2 pages) et Tables statistiques.
Les calculatrices autorisées sont celles retenues par le conseil de la Faculté.
*Barème indicatif* : **I.** 2+2+2+2=8 points. **II.** 2+2+2=6 points. **III.** 2+2+2=6 points.
*Temps moyen indicatif* : **I.** 40mn. **II.** 35mn. **III.** 35mn.

---

## Sujet

**I.** La production de pièces métalliques d'une firme repose sur deux chaines de fabrication, totalement indépendantes. Les défaillances de ces deux chaines peuvent être considérées comme des variables aléatoires $X_1$ et $X_2$ suivant respectivement des lois de Poisson de paramètres $\lambda_1 = 5.5$ et $\lambda_2 = 6.0$.

**I.1.** Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire $Y = X_1 + X_2$ ? En approchant convenablement la loi de $Y$, calculer la probabilité $P(Y > 15)$.

**I.2.** Notons par $\mu$ et $\sigma^2$ la moyenne et la variance de la variable aléatoire $Y$ approximée dans la question précédente. Considérons un échantillon aléatoire et simple $(Y_1,\ldots,Y_n)$, quels sont les paramètres (moyenne et variance) de la variable aléatoire $\overline{Y}$ ? Evaluer ces paramètres pour $n = 81$.

**I.3.** Déterminer un intervalle de confiance de 95% pour $\mu$ et évaluer cet intervalle pour $n = 81$.

**I.4.** Déterminer la taille de l'échantillon pour que l'erreur maximum, au niveau de confiance de 95%, soit inférieure ou égale à $\varepsilon = 0.2$.

**II.** Le nombre de défaillances d'une chaine de fabrication de pièces métalliques est une variable aléatoire $X$ suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda$. Nous souhaitons estimer ce paramètre par la méthode MV (Maximum de vraisemblance).

**II.1.** A partir d'un échantillon $(X_1,\ldots,X_n)$ de la loi de Poisson, écrire la fonction vraisemblance, notée $L(x_1,\ldots,x_n;\lambda)$, et déduire la fonction log-vraisemblance. Calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance, noté $\hat{\lambda}_{MV}$, du paramètre $\lambda$.

**II.2.** L'estimateur $\hat{\lambda}_{MV}$ est-il sans biais ? est-il convergent ?

**II.3.** Etudier l'efficacité de l'estimateur $\hat{\lambda}_{MV}$.

**III.** Une variable aléatoire $Y$ a pour densité $f(y) = (\theta+1)y^{\theta}$ où $0 < y < 1$. $\theta$ est un paramètre réel inconnu et que nous souhaitons estimer à partir d'un échantillon $(Y_1,\ldots,Y_n)$.

**III.1.** Calculer l'espérance $E(Y)$. Donner ensuite l'estimateur $\hat{\theta}_{MM}$ de $\theta$ obtenu par la méthode des moments. Evaluer cet estimateur pour $\overline{y} = 0.75$.

**III.2.** Donner l'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{\theta}_{MV}$ basé sur l'échantillon $(Y_1,\ldots,Y_n)$.

**III.3.** En considérant l'échantillon (0.50 ; 0.73 ; 0.90 ; 0.70 ; 0.62 ; 0.95), déterminer la valeur de l'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{\theta}_{MV}$.