Année Universitaire 2014/2015
Licence Economie – Gestion, L2-S3

**UE Techniques quantitatives**

**Examen : Probabilités et Statistique III – Session 2** - Juin 2015

*Durée de l'épreuve* : **1h30.** Enseignant : M. EL OUARDIGHI

*Documents autorisés* : le formulaire de probabilités et tables statistiques.
Les calculatrices sont autorisées.

*Barème indicatif* : **I.** 2+2+2+2=8 points. **II.** 3+3=6 points. **III.** 2+2+2=6 points.

*Temps moyen indicatif* : **I.** 40mn. **II.** 20mn. **III.** 25mn.

---

## Sujet

**I.** Considérons l'expérience qui consiste à lancer une pièce de monnaie. La probabilité d'obtenir pile étant inconnue et égale à $p$. Le lancer de 120 fois la pièce de monnaie a fourni les résultats suivants : 57 piles et 63 faces.

**I.1.** Donner l'expression de la fonction de vraisemblance en supposant que le résultat d'un jet est une épreuve de Bernoulli de paramètre $p$. Déduire l'expression de la fonction log-vraisemblance.

**I.2.** Donner une estimation $\hat{p}$ du paramètre $p$. Calculer la variance $V(\hat{p})$ de cet estimateur.

**I.3.** L'estimateur $\hat{p}$ est-il efficace ?

**I.4.** Construire un intervalle de confiance pour $p$ de niveau $(1-\alpha)$ où $\alpha = 5\%$.

**II.** Des études ont montré que les oiseaux prennent leur envol après quelques sauts effectués sur le sol. Soit la variable aléatoire $X$ 'nombre de sauts effectués avant un envol réussi'. La variable $X$ peut être ainsi modélisée par une distribution géométrique de paramètre $p$ :

$$P(X = x) = p(1-p)^x \quad \text{pour} \quad x \geq 0.$$

L'observation de 128 oiseaux donne les résultats présentés dans le tableau suivant :

| Nombre de sauts | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Fréquence | 48 | 31 | 20 | 9 | 6 | 5 | 4 | 2 | 1 | 1 |

**II.1.** Ecrire les fonctions vraisemblance et log-vraisemblance. Donner ensuite l'expression de l'estimateur du maximum de vraisemblance du paramètre $p$.

**II.2.** Avec les données du tableau, calculer la valeur estimée du paramètre $p$.

**III.** Un dé homogène est jeté 1200 fois et soit $Y$ 'le nombre de fois que la face 6 apparaît'.

**III.1.** Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire $Y$ ? Par quelle loi continue, notée $X$, peut-on approximer $Y$ ? Calculer ensuite la probabilité $P(180 \leq X \leq 220)$.

**III.2.** Soit un échantillon aléatoire et simple $(X_1, \ldots, X_n)$ issu de la variable aléatoire $X$. Calculer la moyenne $E(\overline{X})$ et la variance $V(\overline{X})$.

**III.3.** Déterminer un intervalle de confiance de 95% pour la moyenne de la variable aléatoire $X$. Quelle est la taille de l'échantillon pour que l'erreur maximum, au niveau de confiance de 95%, soit inférieure ou égale à $\varepsilon = 0.2$.

---