Année universitaire 2014/2015
LICENCE 2ème année Economie – Gestion
Semestre 4 – Session 1 / Contrôle continu / Mars 2015

Probabilités et Statistique IV
COURS : M. J. EL OUARDIGHI ; TD : MM. F. MERCIER; H.A. NAFI AMIR ; B. OUVRARD; E. PERINEL
Durée : 1h30
Tous documents : le formulaire de probabilités et tables statistiques sont autorisés.
Calculatrice : les calculatrices autorisées sont celles retenues par le conseil de la Faculté.
Barème indicatif : I. 1+2+2+3+3= 11 points (*45mn*). **II.** 4 points (*20mn*). **III.** 2+2+1= 5 points (*25mn*).

Sujet

I. Dans une entreprise de l'Est de la France, on étudie la taille de plaques de plâtres produites en série par une entreprise spécialisée dans le domaine. Pour que ces plaques puissent servir à confectionner des faux plafonds à spots incrustés, on limite leur largeur à 120 cm. Les plaques sont carrées et peuvent être découpées à nouveau pour coller parfaitement à des couloirs d'appartements des années 80. A la fin de l'hiver, on entrevoit la possibilité d'effectuer un réglage avant le rush de la période estivale si le besoin s'en fait sentir. On s'intéresse alors à un échantillon aléatoire simple de 28 plaques. La taille moyenne constatée, qui suit une loi gaussienne, est alors de 121.68 cm et l'écart-type de l'échantillon est $s' = 3.585$ cm. On se demande alors si un réglage est nécessaire avant la saison estivale.

I.1. Préciser les hypothèses du test à effectuer. Justifier en particulier s'il faut considérer un test unilatéral ou bilatéral.

I.2. Préciser la loi de décision relative au test en justifiant votre réponse.

I.3. Pour un seuil d'erreur $\alpha = 5\%$, définir la région critique notée W (ou la région d'acceptation notée $\overline{W}$) relative au test. Que peut-on conclure ?

I.4. Déterminer la p-value (la probabilité critique) du test. Interpréter votre résultat.

I.5. Définir et calculer le risque de 2ème espèce, noté β, et la puissance du test, notée η, pour une valeur $\mu = 122.04$. Interpréter vos résultats.

II. Un chercheur en laboratoire d'une grande firme pharmaceutique prétend que la variance des niveaux de cholestérol d'un homme adulte est inférieure à 100mg/dL. A partir d'un échantillon aléatoire constitué de 25 hommes, notre chercheur a obtenu $s'^2 = 81$. Le laboratoire souhaite vérifier si ce que prétend le chercheur est vrai pour un niveau d'erreur $\alpha = 5\%$, et en supposant l'échantillon suit une loi normale. Que pouvez-vous conclure ?

III. Soit une variable aléatoire normale X d'espérance μ inconnue, et d'écart-type $\sigma = 1$. On cherche à effectuer le test : $H_0 : \mu = 1$ contre $H_1 : \mu = 1.5$.

III.1. En notant les vraisemblances $L_0 = L(x_1, \ldots, x_n; \mu_0)$ et $L_1 = L(x_1, \ldots, x_n; \mu_1)$, déterminer le rapport L_0 / L_1. Déduire ensuite $\ln(L_0 / L_1)$.

III.2. La règle de décision de Neyman et Pearson consiste à rejeter l'hypothèse nulle H_0 si $\ln(L_0 / L_1) \leq \ln c$, où la valeur de la constante c est déterminée par le risque fixé. Utiliser cette règle pour isoler la statistique de décision, i.e. la moyenne.

III.3. Pour $n = 25$ et $\ln c = 0.05$, donner la région critique W. Que peut-on conclure pour une valeur observée de $\bar{x}$ est égale à 1.25 ? Que devient la région critique pour $n \to \infty$?
