FSEG STRASBOURG
Faculté des sciences économiques et de gestion

UNIVERSITÉ DE STRASBOURG

**Année universitaire 2014/2015**

**LICENCE 2ème année**
**Economie – Gestion**

**Semestre 4 – Session 1 / Examens Mai 2015**

**Mathématiques 4 (M. Matmour)**

**Durée : 2h**

**Tous documents interdits**

**Calculatrice autorisée**

---

**Sujet :**

**Exercice 1. (6 points)**

Soit le système suivant : $\begin{cases} 2x+3y+z=4 \\ -x+my+2z=5 \\ 7x+3y+(m-5)z=7 \end{cases}$ $m$ étant un paramètre réel.

1. Mettre ce système sous forme la matricelle : AX = B.
2. Calculer le déterminant de A sous forme factorisée et indiquer pour quelles valeurs de $m$ ce système est de Cramer.
3. Résoudre ce système suivant les valeurs de $m$ en appliquant la méthode de Cramer.

**Exercice 2. (10 points)**

On considère la matrice : : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

1. a) Calculer le déterminant de la matrice. Déterminer son inverse avec la méthode des cofacteurs.
   b) Déterminer le rang de cette matrice.
2. a) Calculer le polynôme caractéristique de la matrice $A$ sous forme factorisée.
   b) Déterminer les valeurs propres de la matrice $A$ ainsi que les vecteurs propres associés.
   c) La matrice $A$ est-elle diagonalisable ?Justifier votre réponse.
3. a) Déterminer une matrice inversible $S$ telle que $S^{-1}AS = D$ où $D$ est une matrice à préciser.
   b) Déterminer la matrice $S^{-1}$.
   c) A l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $A^n = SD^nS^{-1}$.
   d) En déduire l'expression de la matrice $A^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. (Détailler les calculs)
4. Démontrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence le résultat trouvé à la question 3.d).

**Exercice 3. (4 points)**

1. On considère l'équation différentielle : $y'' - y' - 2y = (-6x-4)e^{-x}$ $(E_0)$
   1. Résoudre l'équation différentielle : $y'' - y' - 2y = 0$.
   2. Soit $y_p$ la fonction définie par : $y_p(x) = (x^2+2x)e^{-x}$.
      Démontrer que $y_p(x)$ est une solution particulière de $(E_0)$.
   3. Déterminer la solution $y(x)$ de l'équation différentielle $(E_0)$ qui vérifie les conditions initiales
      $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$

2. On considère l'équation différentielle : $y' - 4y = -8x - 2$ $(E_0)$
   1. Résoudre l'équation différentielle : $-y' - 4y = 0$.
   2. Déterminer la solution particulière de $(E_0)$.
   3. Déterminer la solution $y(x)$ de l'équation différentielle $(E_0)$ qui vérifie la condition initiale :
      $y(0) = 1$