

UE Techniques quantitatives
Examen : Probabilités et statistique IV – Session 1 – Mai 2015

Durée de l'épreuve : 2h00.

Enseignant : M. EL OUARDIGHI

Documents autorisés : Formulaire lois usuelles (2 pages) et Tables statistiques.

Les calculatrices (non programmables) sont autorisées.

Barème indicatif : I. 2+2+2+2+2=10 points. II. 2+2=4 points. III. 2+3+1=6 points.

Temps moyen indicatif : I. 45mn. II. 35mn. III. 30mn.

Sujet

I. Un marchand de graines a l'habitude de fournir à une exploitation agricole un mélange de 5 types de graines, référés par G1 à G5, et qui entrent toutes dans le mélange avec les mêmes proportions, i.e. 20%. Le poids et la taille des graines sont sensiblement équivalents, elles ne diffèrent qu'au niveau de la forme. Un jour l'exploitation demande au marchand de préparer un mélange spécial composé de 25% de graines de type G1, les autres graines (G2 à G5) entrent dans le mélange avec des proportions équivalentes. Le jour de la livraison et suite à un déplacement des sacs par un employé, le grainetier hésite entre deux sacs. Il croit cependant que le premier d'entre eux (sac n°1) est le bon, mais il n'en est pas certain. Comment faire ? Evidemment, on pourrait trier les graines de ce sac, mais ceci serait fastidieux. On propose ici un test pour aider le marchand à résoudre son problème. Il s'agit, à partir d'un échantillon de 50 graines du sac n°1, de décider entre deux hypothèses : «le sac est bon, i.e. il contient bien le mélange spécial» et «le sac est ordinaire, i.e. les graines entrent toutes avec les mêmes proportions».

I.1. Présenter le modèle statistique en spécifiant clairement les hypothèses nulle et alternative, notées respectivement H_0 et H_1 .

I.2. Définir la statistique de décision et calculer ses paramètres.

I.3. Déterminer l'intervalle d'acceptation de l'hypothèse nulle pour un risque d'erreur $\alpha = 5\%$. Que peut-on conclure si l'on observe 15 graines de type G1 ?

I.4. Quelle est la puissance du test ? Interpréter votre résultat.

I.5. Effectuer le test LR (rapport de vraisemblance). En particulier, évaluer $\ln(L(p_0)/L(\hat{p}))$ où \hat{p} est l'estimateur du maximum de vraisemblance de la proportion, et conclure pour un risque d'erreur $\alpha = 5\%$.

II. (NB. Les exercices I. et II sont indépendants). Nous reconsidérons le cas du marchand spécialisé dans la préparation des graines pour les exploitations agricoles. En particulier, le grainetier doute du résultat obtenu avec le premier sac (sac n°1) et décide de vérifier le sac n°2. Pour évaluer ce nouveau sac, le marchand décide de vérifier 100 graines. Les résultats sont présentés dans le Tableau 1. Peut-on conclure que le sac n°2 contient bien la même proportion des différents types de graines ? En particulier,

II.1. Enoncer les hypothèses nulle et alternative du test à considérer. Présenter ensuite le tableau des effectifs observées et théoriques.

II.2. Déterminer la variable de décision et calculer sa réalisation. Que peut-on conclure pour un seuil d'erreur de 5%?

Tableau 1. Résultats de l'inspection des graines du sac n°2

Type de graines	G1	G2	G3	G4	G5
Nombre de graines observées	18	21	20	24	17

III. Le directeur d'une école souhaite revoir la répartition des élèves dans 5 classes différentes. Il considère les résultats obtenus au premier trimestre par 147 élèves. Le Tableau 2 présente quelques informations relatives aux résultats de l'analyse de la variance. L'objectif du directeur est de savoir si le niveau des classes ne diffère pas significativement. Dans le cas contraire, il recommandera une nouvelle répartition homogène des élèves entre les cinq classes.

Tableau 2. Résultats de l'analyse de la variance

Variance expliquée	973.85
Variance totale	102.50

III.1. Ecrire les hypothèses du modèle et définir la statistique de décision.

III.2. Effectuer les calculs nécessaires et évaluer la réalisation de la statistique de décision. Que peut-on conclure au seuil d'erreur de 5% ?

III.3. Calculer le coefficient de corrélation empirique et interpréter le résultat. Comment peut-on vérifier le résultat et la conclusion du test précédent ?