FSEG STRASBOURG
Faculté des sciences économiques et de gestion

UNIVERSITÉ DE STRASBOURG

Année universitaire 2014/2015

LICENCE 2ème année
Economie – Gestion

Semestre 4 – Session 2 / Examens juin 2015

Mathématiques 4 (M. Matmour)

Durée : 1h30

Tous documents interdits
Calculatrice autorisée

Il vous est demandé d'apporter un soin particulier à la présentation de votre copie.   *Toute information calculée devra être justifiée.*

Sujet :

Exercice 1. (6 points)

On considère la matrice : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ associée à l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$.

1) Déterminer $Im(f)$ et $Ker(f)$.
2) On considère, dans $\mathbb{R}^3$, les vecteurs v *et* w dont les coordonnées dans la base canonique sont respectivement $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.
   a) Choisir un vecteur u de $Ker(f)$ et montrer que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$. On notera $\mathcal{B}$ cette base.
   b) Déterminer la matrice de f relativement à la base $\mathcal{B}$.

Exercice 2. (9 points)

1. a) Soit $A = \begin{pmatrix} a-1 & a & a \\ b & b-1 & b \\ c & c & c-1 \end{pmatrix}$, avec a, b *et* c réels.

   A quelle condition portant sur a, b *et* c la matrice A est-elle inversible ?

   b) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Cette matrice est-elle inversible ? Si oui, la calculer à l'aide de la méthode des cofacteurs.

2. Soit $B = \begin{pmatrix} m+2 & 2 & -1 \\ 2 & m-1 & 3-m \\ m+1 & m+1 & 0 \end{pmatrix}$, avec m réel.
   a) Calculer le déterminant de B sous forme factorisée.
   b) Déterminer selon les valeurs de m le rang de la matrice B.

Exercice 3. (5 points)

1. On considère l'équation différentielle : $y'' + 2y' + y = 2e^{-x}$ $\qquad (E_0)$
   1. Résoudre l'équation différentielle : $y'' + 2y' + y = 0$.
   2. Déterminer y_p (solution particulière de(E_0)) sachant que $y_p(x) = Ax^2e^{-x}$.
   3. Déterminer la solution $y(x)$ de l'équation différentielle (E_0) qui vérifie les conditions initiales
      $y(0) = 3$ et $y'(0) = 1$

2. On considère l'équation différentielle : $y' + xy = x^2 + 1$ $\qquad (E_0)$
   1. Résoudre l'équation différentielle : $y' + xy = 0$.
   2. Déterminer la solution particulière de (E_0) sachant que $y_p(x) = ax + b$.
   3. Déterminer la solution $y(x)$ de l'équation différentielle (E_0) qui vérifie la condition initiale :
      $y(0) = 1$