Année universitaire 2015/2016

LICENCE Economie-Gestion
2ème année

Semestre 4 – Session 1 / Contrôle terminal mai 2016

Matière : Mathématiques IV (M. BRECKLE)
Durée : 2h
Aucun document autorisé. Calculatrice interdite.

Exercice 1 (5 points)

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. Soit $B = A - I$. Calculer B^2 et B^3.
2. En déduire au moyen d'un raisonnement par récurrence, que : $\forall k \geq 3, B^k = O_3$ où O_3 est la matrice carrée nulle d'ordre 3.
3. On souhaite calculer A^n pour tout entier naturel $n \geq 3$.
   a. Quelles conditions doit-on avoir pour appliquer la formuler du binôme de Newton ?
   b. Déterminer A^n pour tout entier naturel $n \geq 3$ en utilisant cette formule.
4. Vérifier l'exactitude de cette relation au moyen d'un raisonnement par récurrence sur n.

Exercice 2 (5 points)

On considère le système : $\begin{cases} x + my + 2z = m \\ -2x + y + (m-2)z = 1 \\ mx + y + 2z = 2m - 1 \end{cases}$

1. Ecrire ce système sous forme matricielle $AX = B$. On explicitera la matrice A et les vecteurs X et B.
2. Calculer le déterminant de la matrice A, exprimé en fonction de m.
3. Résoudre ce système en discutant suivant les valeurs de m.

Exercice 3 (6 points)

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. a. Calculer le déterminant de la matrice A puis déterminer l'inverse de A
   b. Déterminer le rang de la matrice A.
2. Déterminer les valeurs propres de A et les sous-espaces propres associés à ces valeurs propres.
3. La matrice est-elle diagonalisable ? Justifier. Soit D la matrice diagonale associée à A.
4. Déterminer la matrice de passage P et calculer son inverse P^{-1}.
5. Exprimer D^n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et donner le lien entre A^n et D^n.
6. En déduire l'expression de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 4 (4 points)

1. Dans l'espace $\mathbb{R}^4$, on considère l'ensemble $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + 2y + 3z + 4t = 0\}$.
   a. F est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$? Justifier.
   b. Donner une base de F.

2. On considère dans $\mathbb{R}^4$ les vecteurs :
   $$v_1 = (1,2,3,4) \quad v_2 = (1,1,1,3) \quad v_3 = (2,1,1,1) \quad v_4 = (-1,0,-1,2) \quad v_5 = (2,3,0,1)$$
   Soit F l'espace vectoriel engendré par $\{v_1, v_2, v_3\}$ et soit G celui engendré par $\{v_4, v_5\}$.
   Déterminer les dimensions respectives de F, G, $F \cap G$ et $F + G$.