



UE Techniques quantitatives
Examen : Probabilités et statistique IV – Session 1 – Mai 2016

Durée de l'épreuve : **2h00.**

Enseignant : M. EL OUARDIGHI

Documents autorisés : le formulaire de probabilités et tables statistiques.

Les calculatrices sont autorisées.

Barème indicatif : **I.** 3+2+2+2=9 points. **II.** 2+2+2=6 points. **III.** 3+2= 5 points.

Temps moyen indicatif : **I.** 50mn. **II.** 30mn. **III.** 25mn.

Sujet

I. Une ampoule est produite par une machine robotisée. Quand la machine est supposée non déréglée, en moyenne, la proportion des ampoules défectueuses est de l'ordre de 15%. On prélève au hasard un échantillon de 100 unités et on observe que 20 ampoules d'entre elles sont défectueuses. On cherche à savoir si la machine est bien réglée.

I.1. Présenter le modèle statistique, i.e. les hypothèses nulle et alternative, notées respectivement H_0 et H_1 (indication : ici un test unilatéral peut-être justifié). Définir ensuite la statistique de décision et calculer ses paramètres.

I.2. Déterminer la région critique (ou l'intervalle d'acceptation) de l'hypothèse nulle pour un risque d'erreur $\alpha = 5\%$. Que peut-on conclure ?

I.3. Pour une valeur de $p_1 = 0.20$, quelle est la puissance du test ? Interpréter votre résultat.

I.4. Le rapport des vraisemblances $L(p_0)/L(\hat{p})$ où \hat{p} est l'estimateur du maximum de vraisemblance de la proportion est de l'ordre de 0.405. Effectuer le test LR (rapport de vraisemblance) et conclure pour un risque d'erreur $\alpha = 5\%$.

II. Une firme spécialisée dans l'emballage des ampoules souhaite mettre en place une nouvelle organisation du travail afin de réduire la détérioration des ampoules par manipulation. Le Tableau 1 présente le nombre moyen d'ampoules détériorées durant quatre épisodes d'emballage *avant* et *après* la nouvelle organisation du travail. Nous souhaitons tester, pour un risque $\alpha = 5\%$, l'hypothèse selon laquelle la nouvelle organisation du travail est efficace.

Tableau 1. Nombre moyen d'ampoules détériorées

Episode d'emballage	1	2	3	4
Ancienne organisation	10	11	10	12
Nouvelle organisation	7	8	9	7

II.1. Préciser les hypothèses du test et la variable de décision. Calculer ensuite la moyenne et la variance de cette dernière.

II.2. Pour un risque $\alpha = 5\%$, définir l'intervalle d'acceptation (unilatéral) et conclure.

II.3. Le service responsable de la nouvelle organisation du travail avait noté par le passé 'que durant l'épisode 3, le nombre moyen d'ampoules détériorées peut être représenté par une loi normale de moyenne 8 avec un écart-type $\sigma = 1.5$ '. Quel est le nombre minimum d'observations au-delà duquel cette hypothèse sera toujours rejetée ? Justifier votre réponse.

III. Les ampoules produites par une firme sont stockées dans de nouvelles boîtes résistantes aux chocs. Chaque boîte contient trois ampoules. Le Tableau 2 présente les résultats d'un contrôle de 600 ampoules produites et stockées dans 200 boîtes. Soit la variable aléatoire X 'nombre d'ampoules défectueuses par boîte'. Nous souhaitons tester l'hypothèse selon laquelle X suit alors une loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = 0.30$.

Tableau 2. Résultats du contrôle du stockage

Nombre d'ampoules défectueuses x_i	Nombre de boîtes n_i
0	80
1	70
2	40
3	10

III.1. Présenter les hypothèses du test. Calculer ensuite les effectifs théoriques.

III.2. Que peut-on conclure pour un risque d'erreur $\alpha = 5\%$? Quelle autre loi suggériez-vous dans le cas présent ?