L2 S4 - CC mars 2016

Corrigé

Exercice 1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 1 & b & 3 \\ 1 & c & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & a & 2 \\ 1 & b & 3 \\ 1 & c & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & 2 \\ 0 & b-a & 1 \\ 0 & c-a & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \begin{vmatrix} b-a & 1 \\ c-a & 0 \end{vmatrix} = -(c-a) = a-c$$

$$\text{com}\, A = \begin{pmatrix} 2b-3c & 1 & c-b \\ 2c-2a & 0 & a-c \\ 3a-2b & -1 & b-a \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\, {}^t\text{com}\, A = \begin{pmatrix} \frac{2b-3c}{a-c} & -2 & \frac{3a-2b}{a-c} \\ \frac{1}{a-c} & 0 & \frac{1}{c-a} \\ \frac{c-b}{a-c} & 1 & \frac{b-a}{a-c} \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{tr}\left({}^{t}(A^{-1})\right) = \mathrm{tr}(A^{-1})$$

$$= \frac{2b-3c+b-a}{a-c} = \frac{-a+3b-3c}{a-c}$$

Exercice 2

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

On calcule BX :

$$BX = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

$$BX = \begin{pmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Puis XB :

$$XB = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$XB = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & d & e \\ 0 & g & h \end{pmatrix}$$

Par identification :

$$BX = XB \iff \begin{cases} d = g = h = 0 \\ a = e = i \\ b = f \end{cases}$$

Les matrices qui commutent avec B sont donc celles du type

$$X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \quad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Exercice 3

$$(S) \begin{cases} -3t + x + y + z = 2 \\ 15t + x - 2y + 2z = -3 \\ -9t + x + y - z = 0 \end{cases}$$

Il y a 3 équations et 4 inconnues, donc une infinité de solutions.

On fixe t comme paramètre.

$$\begin{cases} x + y + z = 2 + 3t \\ x - 2y + 2z = -3 - 15t \\ x + y - z = 9t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 2 + 3t \\ \quad -3y + z = -5 - 18t & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ \qquad -2z = -2 + 6t & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{cases}$$

D'où : $z = 1 - 3t$

Puis : $-3y + (1 - 3t) = -5 - 18t$

d'où : $y = 2 + 5t$

et $x + (2 + 5t) + (1 - 3t) = 2 + 3t$

d'où : $x = -1 + t$

L'ensemble des solutions de (S) est donné par les vecteurs de la forme :

$$\vec{v} \begin{pmatrix} -1 + t \\ 2 + 5t \\ 1 - 3t \\ t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Exercice 4

1. $E_1 = \left\{ (a, b, a+b),\ a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R} \right\}$

$(a, b, a+b) = a(1, 0, 1) + b(0, 1, 1)$

D'où : $\vec{u} \in E_1$

$\Longleftrightarrow \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2,\ \vec{u} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Longleftrightarrow E_1 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

E_1 est le s.e.v. de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

E_2 ne contient pas le vecteur $(0, 0, 0)$ donc ce n'est pas un espace vectoriel.

2. $F_a = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ ax + a^2 y - a^3 + a^2 + 2a = 0,\ a \in \mathbb{R} \right\}$

- $F_a \subset \mathbb{R}^2$
- $F_a \neq \emptyset$, par exemple $(x, y) = (a^2 - a - 2, 0) \in F_a$

car $a(a^2-a-2)+a^2\times 0-a^3+a^2+2a$

$= a^3-a^2-2a+0-a^3+a^2+2a=0.$

Soient $\vec{v_1}\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$ $\vec{v_2}\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}$ $\vec{v_1},\vec{v_2}\in F_a$

et soient $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$.

On cherche pour quelles valeurs de a

on aura $\lambda_1\vec{v_1}+\lambda_2\vec{v_2}\in F_a$ ($\rightarrow$ stabilité)

$\lambda_1\vec{v_1}+\lambda_2\vec{v_2}=\lambda_1\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}\lambda_1x_1+\lambda_2x_2\\\lambda_1y_1+\lambda_2y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

$\varepsilon=ax+a^2y-a^3+a^2+2a$

$=a(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)+a^2(\lambda_1y_1+\lambda_2y_2)-a^3+a^2+2a$

$=\lambda_1(ax_1+a^2y_1)+\lambda_2(ax_2+a^2y_2)-a^3+a^2+2a$

Or, $\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}\in F_a$ donc $ax_1+a^2y_1=a^3-a^2-2a$

$\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}\in F_a$ donc $ax_2+a^2y_2=a^3-a^2-2a$

Donc :

$$\mathcal{E} = (\lambda_1 + \lambda_2 - 1)(a^3 - a^2 - 2a)$$

$$= a(a^2 - a - 2)(\lambda_1 + \lambda_2 - 1)$$

$$= a(a+1)(a-2)(\lambda_1 + \lambda_2 - 1)$$

Or : $\lambda_1 \vec{v_1} + \lambda_2 \vec{v_2} \in F_a \iff \mathcal{E} = 0$

$\iff a(a+1)(a-2)(\lambda_1 + \lambda_2 - 1) = 0.$

$\iff a = 0$ <u>ou</u> $a = -1$ <u>ou</u> $a = 2.$

- si $a = 0$, $F_0 = \mathbb{R}^2$
- si $a = -1$, $F_{-1} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ -x + y = 0\}$

  F_{-1} est la droite d'équation $y = x$.
- si $a = 2$, $F_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 2x + 4y = 0\}$

  $= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x + 2y = 0\}$

  F_2 est la droite d'équation $y = -\dfrac{x}{2}$.